Bloque 12. Tema 6.

Probabilidad.

ÍNDICE

1) INTRODUCCIÓN

2) CONCEPTOS ELEMENTALES EN PROBABILIDAD.
   2.1. Experimentos deterministas.
   2.2. Experimento aleatorio.
   2.3. Espacio muestral.
   2.4. Evento o suceso.
   2.5. Suceso elemental.
   2.6. Suceso compuesto.
   2.7. Suceso seguro.
   2.8. Suceso imposible.
   2.9. Sucesos compatibles.
   2.10. Sucesos incompatibles.
   2.11. Sucesos independientes.
   2.12. Sucesos dependientes.
   2.13. Suceso contrario.
   2.14. Ejemplos.

3) RELACIONES ENTRE SUCESOS.

4) PROBABILIDAD CLÁSICA. REGLA DE LAPLACE.
   4.1. Probabilidad del suceso contrario.
   4.2. Probabilidad del suceso seguro.
   4.3. Probabilidad de un suceso imposible.

5) PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDAD.
   5.1. Probabilidad de la unión de sucesos.
   5.2. Probabilidad de que ocurra el suceso A y el B en experiencias compuestas.

6. PROBABILIDAD COMPUESTA CON REPOSICIÓN Y SIN REPOSICIÓN.

7. DIAGRAMAS EN ÁRBOL.

1) INTRODUCCIÓN

La **definición de probabilidad** se produjo debido al deseo del ser humano por conocer con certeza los eventos que sucederán en el futuro, por eso a través de la historia se han desarrollado diferentes enfoques para tener un concepto de la probabilidad y determinar sus valores. Por eso su estudio está vinculado a los juegos de azar.

Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos de la unidad: experimento aleatorio o determinista, espacio muestral, suceso, operaciones con sucesos, probabilidad, regla de Laplace y diagrama de árbol.

Vídeo nº1: Descifrar las probabilidades en la vida.Fuente: Youtube

https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=p_SWxgyeb-s

2) CONCEPTOS ELEMENTALES EN PROBABILIDAD

Llegados a este punto tenemos que definir los **conceptos fundamentales** que van a establecer las bases de este tema. Por ejemplo, ¿se trata del mismo experimento cuando lanzamos un dado, que cuando volcamos un vaso lleno de agua? ¿Cómo repercute en nuestros cálculos que un suceso sea compatible o incompatible? ¿se trata de la misma probabilidad cuando realizamos el experimento de lanzar un dado o que dos?

La respuesta a todas estas preguntas es no por eso debemos definir todos estos sucesos para posteriormente estudiar cómo repercuten en nuestros cálculos.

Vídeo nº2: Probabilidad poco intuitiva. Fuente: Youtube

https://www.youtube.com/watch?v=_mbO-ndr740

2.1) EXPERIMENTOS DETERMINISTAS

Un **experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que **sabemos lo que sucederá antes de que ocurra**. Algunos ejemplos:

- Si tiramos una piedra al aire esta caerá.
- Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto de 1 hora, tenemos la certeza de que ha recorrido 100 km.
- Si ponemos agua en el congelador sabemos que se congelará a 0º C.

Imagen 1: Cubitos de hielo. Fuente:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Ice_cubes_openphoto.jpg
Autor: Darren Hester. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 1

Escribe algunos ejemplos de experimentos deterministas.

2.2) EXPERIMENTO ALEATORIO

Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

Por ejemplo:

- Si lanzamos una moneda no sabemos si saldrá cara o cruz.
- Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.
- Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.

Imagen 2: Dados en equilibrio.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Dados.jpg
Autor: Matiastosini. Licencia: Creative Commons (CC)

El concepto de probabilidad se encuentra con frecuencia en la comunicación entre las personas. Por ejemplo:

1) Juan y Antonia tienen un 60% de probabilidades de casarse.
2) Los alumnos de bachillerato tienen un 90% de probabilidades de ingresar a la universidad.

En los ejemplos, se da la "medida" de que suceda realmente un evento que es incierto (casarse o ingresar a la universidad), y ésta se expresa mediante un número entre 0 y 1, o en porcentaje.

Intuitivamente podemos observar que cuanto más probable es que ocurra el evento, su probabilidad estará más próxima a "1" o al 100%, y cuando menos probable, más se aproximará a "0".

De aquí se deduce que un hecho o evento que NO puede ocurrir tendrá probabilidad cero y uno cuya probabilidad es segura tendrá probabilidad uno.

Luego, si A representa un evento o suceso, se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ejercicio 2

Lee el párrafo que aparece abajo y completa las palabras que faltan:

Lanzar un dado es un experimento _____

El resultado de dividir 10 entre 2 es un experimento _____

Lanzar una moneda al aire es un experimento _____

Sacar una carta de una baraja española es un experimento _____

Saber el resultado de elevar un número al cuadrado es un experimento

Conocer el tiempo que hará mañana se trata de un experimento _____

Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 verdes es un experimento _____

2.3) ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral (E) Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento. Se representa con la letra E.

Ejemplo 1: **Al lanzar un dado de seis caras**, el espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral si se lanza una moneda y un dado de seis caras?

Usamos el principio multiplicativo: 2 • 6 = 12 elementos

En el lanzamiento de monedas, la cantidad de resultados posibles también se determina por el principio multiplicativo:

1 Moneda → 2 posibilidades E = {c, s}

2 Monedas → 2 x 2 = 4 posibilidades E = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)}.

3 Monedas → 2 x 2 x 2 = 8 posibilidades E = {(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s), (s,c,c), (s,c,s), (s,s,c), (s,s,s)}

n monedas → 2 x 2 x 2 x 2…= 2n posibilidades

Imagen 3: Lanzamiento de una moneda al aire.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Pile_ou_face.png. Autor: Ipipipourax. Licencia. Creative Commons (CC)

Cuando un objeto puede caer de a maneras distintas y se lanzan n objetos, el Espacio Muestral tiene a n elementos.

Ejemplo 3: Al lanzar tres dados de seis caras, el Espacio Muestral tiene = 216 elementos

Ejercicio 3

¿Qué es el espacio muestral? ¿Por qué letra se representa?

Ejercicio 4

¿Cuál es el espacio muestral de un dado de 8 caras?

2.4) EVENTO O SUCESO

Un evento o Suceso corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

Cualquier suceso se representa con una letra mayúscula excepto la **E** que reservamos para definir el espacio muestral.

Ejemplo 1: En el lanzamiento de 2 monedas, el Espacio Muestral es E = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)} y tiene 4 elementos.

Un **suceso** es que salgan **dos caras**, es decir {(c,c)}, que **tiene 1 elemento.**

Imagen 4: Moneda suiza de diez centavos. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/MONEDA_CARA_Y_CRUZ.jpg.
Autor: Padawane Licencia: Dominio público.

Ejemplo 2: En el lanzamiento de un **dado** ¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral y cuántos el suceso **"que salga un número par"**?

Espacio Muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 6 elementos. Suceso = {2, 4, 6}, **3 elementos**

Ejercicio 5

¿Qué es un suceso?

Ejercicio 6

En el experimento "lanzar un dado de 6 caras" escribe el espacio muestral y los sucesos A "múltiplo de 3" y B "menor que 3".

2.5) SUCESO ELEMENTAL

Un Suceso Elemental es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio, es decir, cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Por ejemplo un suceso **elemental** del experimento "sacar una carta de la baraja española" sería:

A={sacar el 5 de copas}

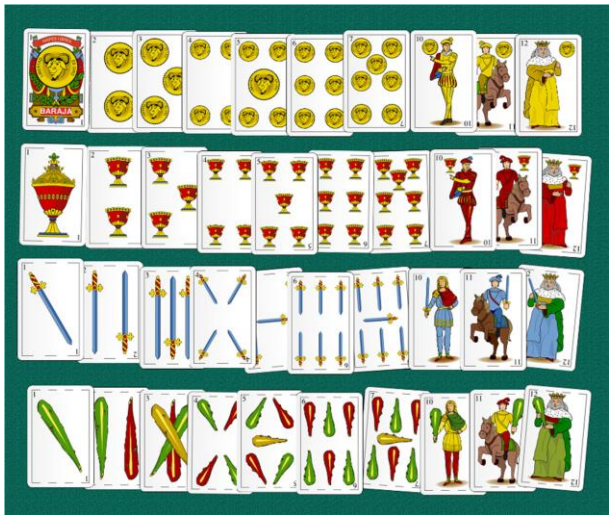


Imagen 5: Juego de cartas estilo español. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/baraja_espanola.png
Autor: Basquetteur. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 7

Completa la tabla:

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar una moneda		
Lanzar un dado		

2.6) SUCESO COMPUESTO

Un suceso compuesto es cualquier subconjunto del espacio muestral:

Al lanzar un dado se muestran **dos ejemplos** de sucesos compuestos:

- Salir par: A={2,4,6}
- Salir múltiplo de 2: B={2,4,6}

Imagen 6: Dados en forma de poliedro regular. Fuente: http://localhost:51235/Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/muchos_ dados.jpg
Autor: Peng Licencia: Dominiopúblico.

Ejercicio 8

Escribe 4 ejemplos de sucesos compuestos en el experimento "sacar cartas de una baraja española"

Ejercicio 9

En el experimento "lanzar un dado de 8 caras", cuatro sucesos compuestos serían….

2.7) SUCESO SEGURO

Imagen 7: Número 6. Fuente: Wikipedia.
Autor: Andreas Levers. Licencia: Creative Commons (CC)

Un suceso seguro está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral por lo que ocurre siempre.

Ejemplo: al tirar un dado un dado: S={salir 6 o un número menor que 6}

Ejercicio 10

¿Qué es un suceso seguro?

Ejercicio 11

Inventa un ejemplo que sea suceso seguro.

2.8) SUCESO IMPOSIBLE

Un suceso imposible no puede ocurrir nunca. Se representa con el conjunto vacío Ø.

Ejemplo: al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7. A={7}

Ejercicio 12

	V / F
De una baraja española de 40 cartas un suceso seguro sería sacar picas	
En una bolsa con 5 bolas rojas y 3 negras un suceso seguro sería sacar una bola verde	
Si tenemos una caja con fichas numeradas del 1 al 4 un suceso seguro sería sacar una ficha con un número menor que 5	
Un suceso imposible sería si al lanzar 2 dados al aire y sumar la puntuación de sus caras obtener 0	
Al lanzar un dado al aire un suceso seguro sería salir un número mayor que 6	

2.9) SUCESOS COMPATIBLES

Dos sucesos, S y T, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

S= {salir par}={2,4,6} y T={salir menor que 4}={1,2,3}

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

Ejercicio 13

Escribe un ejemplo de suceso compatible.

2.10) SUCESOS INCOMPATIBLES

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, NO SE PUEDEN DAR A LA VEZ.

S= {salir par}={2,4,6} y T={salir múltiplo de 5}={1,5}

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

Ejercicio 14

Por ejemplo, en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir copas}

Razona si los sucesos son compatibles o incompatibles

2.11) SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Al lazar dos dados los resultados son independientes

Imagen 8: Ejemplo de dados.
Fuente:http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/2_dados.jpg. Autor: Roland Scheicher. Licencia: Dominio público

Ejercicio 15

Piensa un ejemplo de sucesos independientes.

2.12) SUCESOS DEPENDIENTES

Ejemplo: Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Si extraemos dos cartas de una baraja y la primera es un rey condiciona a la extracción de la segunda carta, son por tanto sucesos dependientes.

Imagen 9: Reyes de la baraja española.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fe/TuteFourKings.jpg.
Autor: GDuwen. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 16

Un ejemplo de suceso dependiente sería...

2.13) SUCESO CONTRARIO

Un suceso Contrario: $\bar{A}$ o A' Es aquel que se verifica cuando no ocurre el suceso A.

Ejemplo 1: A={salir cara} $\bar{A}$ = {salir cruz}

Ejemplo 2: Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Ejercicio 17

Escribe los sucesos contrarios en los siguientes casos:

A={1,2} B={1,5} C={2,5} D={3,4,5,6}

2.14) EJEMPLOS

En los siguientes ejemplos utilizaremos una baraja española, es decir, una baraja de 40 cartas, para ilustrar los conceptos definidos en los apartados precedentes.

Ejemplo 1: Experimento: "sacar una carta de una baraja española";

En este caso el espacio muestral será: E = {las 40 cartas de la baraja}

- Suceso: "salir el as de bastos"

En este caso el suceso es elemental, ya que incluye a un único elemento del espacio muestral.

- Suceso A: "salir el as de oros o la sota de bastos"
- Suceso B: "salir un as"
- Suceso C: "salir una carta de copas"

Ahora los tres sucesos son compuestos, ya que todos constan de más de un elemento del espacio muestral.

Además los sucesos A y B son compatibles, ya que ambos pueden ocurrir a la vez si la carta extraída es el as de oros.

También los sucesos B y C son compatibles, ya que ocurrirán los dos si la carta que sale es el as de copas, sin embargo, los sucesos A y C son incompatibles, ya que no pueden suceder a la vez, sea cual sea la carta que salga.

El suceso contrario al suceso B será "no salir un as", y se denotará de la forma: B' = {no salir una carta de copas}.

- Suceso seguro es: Suceso seguro es: "cualquier carta"; y Suceso imposible es: "ninguna carta" "cualquier carta"; y Suceso imposible es: "ninguna carta", aunque en este caso podríamos poner como ejemplo cualquier resultado que no pudiera darse al extraer una carta de la baraja.

Ejemplo 2: Experimento: realizar una extracción de la baraja, anotar el resultado y volver a introducir la carta en la baraja, realizar entonces una segunda extracción y anotar el resultado. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas.

- Suceso A: "salir el as de bastos en la primera extracción"
- Suceso B: "salir el as de bastos en la segunda extracción"

Los sucesos A y B son independientes, ya que la carta que salga en la segunda extracción no depende del resultado obtenido en la primera, puesto que el resultado únicamente se anota y la carta vuelve a ponerse en el mazo.

Ejemplo 3: Experimento: realizar una extracción de la baraja, y a continuación realizar una segunda extracción y anotar el resultado de ambas. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas, pero notar que los dos elementos de la pareja deben ser distintos.

- Suceso A: "salir el as de bastos en la primera extracción"
- Suceso B: "salir el as de bastos en la segunda extracción"

Los sucesos son dependientes, ya que si ocurre A, es decir, sale el as de bastos en la primera extracción, no puede ocurrir el suceso B, porque esa carta no estaría en el mazo, mientras que si el suceso A no ocurre, entonces puede ocurrir B.

Ejercicio 18

De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:

a) A={Salir una figura} , B={Salir un oro} _____

b) A={Salir el as de bastos}, B={Salir el as de copas} _____

c) A={Salir una copa}, B={Salir el siete de copas} _____

Ejercicio 19

En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a:

A={Sacar un número par menor que 5}

B={1,2,6}

C={3}

Ejercicio 20

En una urna tenemos 3 bolas blancas y dos bolas rojas. Identifica la dependencia o independencia de sucesos en cada uno de los experimentos siguientes:

a) Experimento sin reemplazamiento: sacamos una bola, la dejamos fuera y sacamos otra. Sucesos: A={Roja en la primera extracción} B={Blanca en la segunda extracción}.

b) Experimento con reemplazamiento: sacamos una bola, anotamos su color, volvemos a meterla en la urna y sacamos otra.

Sucesos: A={Roja en la primera extracción}

B={Blanca en la segunda extracción}.

3) RELACIONES ENTRE SUCESOS

La unión de Sucesos: A U B es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B.

La intersección de Sucesos: A ∩ B es el suceso formado por los elementos que están simultáneamente en A y en B.

Ejemplo 1: lanzamos un dado tal que dos sucesos:

A={impar}={1,3,5}

B={primo}={2,3,5}

A U B={1,2,3,5}

Ejemplo 2: lanzamos un dado tal que dos sucesos:

A={par}={2, 4, 6}

B={primo}={2,3,5}

A ∩ B={2}

Ejercicio 21

Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

a) **¿Cuál es el espacio muestral?**
b) **A=”obtener numero primo”, B=”múltiplo de 3”. Escribe los sucesos, A, B , A’, B’ , A ∩ B, AUB, AUA’ y A ∩ A’**

Ejercicio 22

Lanzamos dos veces una moneda:

a) **Escribe todos los sucesos elementales**
b) **Escribir el suceso S={la primera sale cara}**
c) **Escribir suceso incompatible con S**

4) PROBABILIDAD CLÁSICA. REGLA DE LAPLACE

En este apartado veremos cómo se asignan probabilidades a sucesos de ciertos experimentos, tener en cuenta que cuando se hace un experimento aleatorio se pueden dar **dos situaciones**:

- **Que conozcamos de antemano**, o a priori, **los resultados** que pueden darse: por ejemplo en el caso del lanzamiento de una moneda, experimento en el que sólo puede obtenerse cara o cruz. En estos casos se dice que la **asignación de probabilidades se realiza "a priori"**.
- **Que desconozcamos a priori los resultados** que pueden darse: por ejemplo, en el experimento "contar los coches que echan gasolina en una determinada estación de servicio de 9 a 10 de la mañana", evidentemente no sabemos de antemano cuantos valores pueden darse, ya que pueden ser tres coches, cuatro o treinta. Para asignar probabilidades en estos experimentos es preciso tomar muchos datos, diciéndose que la **asignación de probabilidades se realiza a posteriori**.

  En este nos referimos a la asignación de probabilidades "a priori", utilizando una regla que lleva el nombre del matemático francés Pierre Simon Laplace, así si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

Imagen 10: Pierre Simon Marquis de Laplace. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/Laplace.j pg.
Autor: Guerin. Licencia: Dominio público.

$$P(A) = \frac{casosfavorables}{casosposibles}$$

Ejemplo 1: Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Por lo tanto:

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Consecuentemente:

Casos favorables: 1.

La solución será:

$$P(2caras)=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2: En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(as)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(copas)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 3: Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

a) Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(par)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

b) Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

c) Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

d) Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(>4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 23

En una urna hay tres bolas rojas, dos verdes y cinco blancas. Se saca una bola anotando el color de la bola extraída. Determina la probabilidad de los sucesos: {Salir roja}, {Salir verde} y {Salir blanca}.

Ejercicio 24

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, determian la probabilidad de los sucesos A = {Salir una figura de copas}, B = {Salir un tres} y C ={Salir una sota}. Calcula también $P(B^c)$.

P(A) = _____

P(B) = _____

P(C) = _____

$P(B^c)$ = _____

4.1) PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO

La probabilidad del suceso contrario es la probabilidad de que un suceso NO ocurra, o "probabilidad de un suceso contrario", se obtiene a través de:

$$P(A)=1-P(A')$$

Ejemplo: Si La probabilidad de que llueva es 2/5, ¿cuál es la probabilidad de que NO llueva?

Solución: P(no llueva) = 1 - P(llueva) = 1 – 2/5 = 3/5

Ejercicio 25

Calcula la **probabilidad del suceso contrario** en los siguientes casos:

Experimento "lanzar un dado de 6 caras":

Suceso	Probabilidad del suceso contrario
A={Sacar un número menor que 4}={1,2,3}	
B={Sacar un número impar}={1,3,5}	
C={{Sacar un múltiplo de 2}={2,4,6}	
D={Sacar un número mayor 6} = {0}	

Ejercicio 26

La probabilidad de un suceso es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

4.2) PROBABILIDAD DEL SUCESO SEGURO

La probabilidad de un suceso seguro es si se tiene certeza absoluta de que un evento A ocurrirá: P(A) = 1

Ejemplo: Al lanzar un dado de 6 caras.

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 6 (1,2,3,4,5,6)

P(A) = 6/6 = 1

Ejercicio 27

Inventa 2 ejemplos de un suceso seguro y calcula su probabilidad.

4.3) PROBABILIDAD DE UN SUCESO IMPOSIBLE

La probabilidad de un suceso imposible es si se tiene certeza absoluta de que un evento A **NO ocurrirá**: P(A) = 0

Ejemplo: La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 0

P(mayor que 6) = 0/6 = 0

Ejercicio 28

Inventa 2 sucesos imposibles y calcula su probabilidad.

5) PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD

En este epígrafe vamos a estudiar algunas de las **propiedades básicas del cálculo de la probabilidad** como son las propiedades de la **unión de sucesos** (distinguiendo los sucesos compatibles e incompatibles) y las propiedades de que ocurran A y B en **experimentos compuestos**.

5.1) PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

Caso 1: La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles viene dada:

p(A ∪ B) = p(A) + p(B)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Caso 2: La probabilidad de la unión de sucesos compatibles:

P (A∪ B) = P(A) + P(B) - P(A∩)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 29

Lanzamos dos dados y sumamos sus resultados. Dados los sucesos A={salir más de 5}, B={salir un número par} y C={salir 2}, determina:

a) P(A)

b) P(B)

c) P(C)

d) P(A U B)

e) P(B U C)

f) P(A U C)

g) P(A U B U C)

Ejercicio 30

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

5.2) PROBABILIDAD DE QUE OCURRA EL SUCESO A Y EL B EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

Caso 1: Cuando A y B son eventos independientes: (si la probabilidad de que ocurra el proceso B no depende de que haya ocurrido o no antes A.), se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo**:**

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado se obtengan dos números pares?

Solución:
Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 3 (2,4,6) Entonces: P(dos pares) = P(par) y P(par) = P(par) • P(par) = 3/6 • 3/6 = 9/36 = 1/4

Caso 2: Cuando A y B son eventos dependientes corresponde la **Probabilidad Condicionada.**

Sea un experimento aleatorio en el que hay dos sucesos A y B. Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A, y se denota como **P(B/A)** a la probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que es también A viene dado por **P(B/A)** y cuya fórmula es:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo**:**

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 sabiendo que ha salido par?

B = {Sacar 4} = {**4**}

A = {Número par} = {2,**4**,6}

P(B/A) = 1/3

$$\frac{145}{334} \cdot \frac{196}{334}$$

Ejercicio 31

La encuesta sobre el agrado del fútbol en la TV según los sexos entre alumnos de 14-18 años es la siguiente:

	A = Varones	A' = Mujeres	
B = agrada el fútbol	145	42	187
B' = no agrada el fútbol	51	96	147
	196	138	334

Considerar los sucesos:

A = Ser varón

A' = Ser mujer

B = Le gusta el fútbol

B' = no le gusta el fútbol

Calcula:

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el futbol(B) p(B/A)=
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el futbol(B') p(B'/A)=
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el futbol(B) p(B/A')=
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste futbol(B') p(A'/B')=
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea varón(A) p(A/B)=
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea mujer(A') p(A'/B)=

Ejercicio 32

En lugar de utilizar las tablas de contingencia del problema anterior utiliza la fórmula:

$$\frac{P(A(\cap)B)}{P(A)}$$

Para calcular el problema anterior y comprueba que los resultados son los mismos

Ejercicio 33

Extraemos una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta sea rey de oros, sabiendo que la carta extraída es una figura.

6) PROBABILIDAD COMPUESTA CON REPOSICIÓN Y SIN REPOSICIÓN

Hasta ahora sólo hemos trabajado el cálculo de la probabilidad con experiencias simples, es decir, sacando sólo una carta de la baraja, sacando una bola de una urna o lanzando un dado al aire. Ahora vamos a estudiar la probabilidad en **EXPERIENCIAS COMPUESTAS**. Ejemplos de ellas sería lanzar dos veces un dado o sacar tres cartas de una baraja.

Ahora bien, esto lo podemos hacer de dos maneras diferenciadas: **CON REPOSICIÓN Y SIN REPOSICIÓN**. Veámoslo.

PROBABILIDAD CON REPOSICIÓN:

Cuando extraemos una carta y miramos el palo, y la volvemos a introducir, estamos en una situación de **REPOSICIÓN**. Y si después extraemos otra carta y la volvemos a mirar, podremos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que ambas sean copas. Está claro que son sucesos independientes, ya que al volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción no depende del palo de la primera.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

Primera extracción	Segunda extracción (Con reposición)
Casos posibles: 30	Casos posibles: 30
Casos favorables: 12	Casos favorables: 12

Entonces:

$$P(\text{dos blancas}) = P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca})$$

$$= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca})$$

$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} = \frac{144}{900} = \frac{4}{25}$$

PROBABILIDAD SIN REPOSICIÓN:

Cuando extraemos una carta y miramos el palo, y **NO** la volvemos a introducir, estamos en una situación **SIN REPOSICIÓN**. Y si después extraemos otra carta y la volvemos a mirar, podremos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que ambas sean copas. Está claro que son sucesos dependientes, ya que al no volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción depende del palo de la primera.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, sin reposición, ¿cuál es la

Solución:

Primera extracción	Segunda extracción (Sin reposición)
Casos posibles: 30	Casos posibles: 29
Casos favorables: 12	Casos favorables: 11

Entonces:

$$P(\text{dos blancas}) = P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca})$$

$$= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca})$$

$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{132}{870} = \frac{22}{145}$$

7) DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

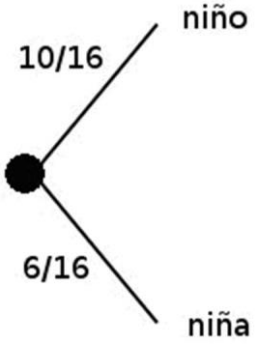
Ejemplos

Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

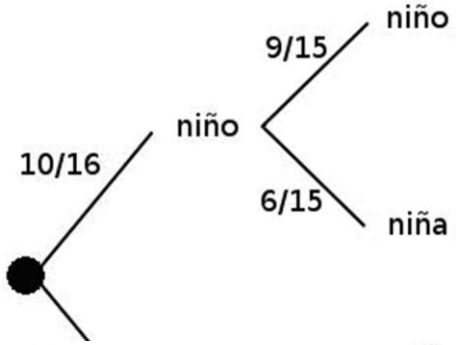
1) Seleccionar tres niños.
2) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
3) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.
4) Seleccionar tres niñas.

Solución: para obtener las probabilidades pedidas, utilizaremos un diagrama de árbol etiquetado con probabilidades. Lo construiremos paso a paso:

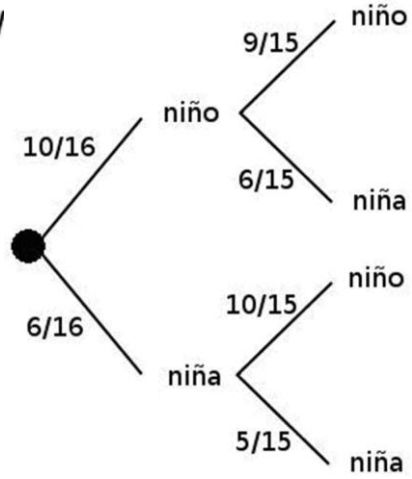
- En primer lugar anotamos la probabilidad de que al escoger por primera vez la elección sea un niño o una niña, siendo, según la Regla de **Laplace** 10/16 la probabilidad de elegir un niño y 6/16 la de que sea niña, escribiendo en forma de diagrama será:

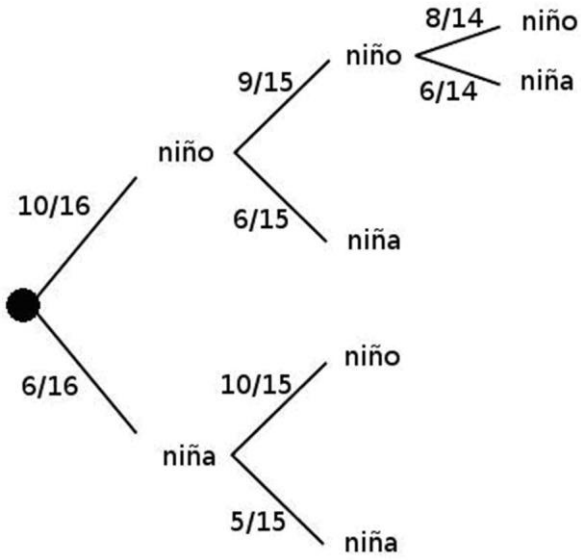


- Ahora la situación es distinta en función de la elección que se ha hecho en primer lugar, puesto que en el caso de haber elegido niño en la primera selección, quedarán 15 alumnos, de los que 9 serán niños y 6 niñas, las probabilidades en forma de diagrama se escribirán entonces así:



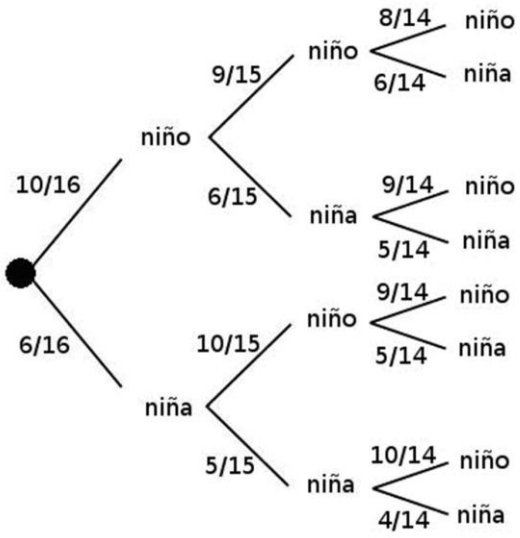
- Sin embargo, si en la primera elección se eligió niña la situación será que hay 15 alumnos, de los que 10 serán niños y 5 niñas, por lo que las probabilidades para la segunda elección al azar serán diferentes. Así completamos el diagrama con las opciones que faltan para la segunda elección.





- Razonando del mismo modo en las hojas restantes podemos completar el diagrama de árbol que nos ayudará a resolver a las cuestiones planteadas en este ejercicio, y que queda así:

- Llegamos así a cuatro posibles situaciones diferentes para realizar la tercera elección, supongamos que la secuencia de elecciones ha sido niño-niño, es decir, estamos en la hoja superior del diagrama de árbol que estamos construyendo, la situación será que hay 14 alumnos de los que 8 son niños y 6 niñas, el árbol se completa como vemos:



Podemos ahora contestar a los diferentes apartados:

1) Seleccionar tres niños.

p(3 niños) $= \frac{10}{16} * \frac{9}{15} * \frac{8}{14} = 0{,}214$

2) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

p (2 niños y 1 niña) = $\frac{10}{16} * \frac{9}{15} * \frac{6}{14} + \frac{10}{16} * \frac{6}{15} * \frac{9}{14} + \frac{6}{16} * \frac{10}{15} * \frac{9}{14} = 0{,}482$

3) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

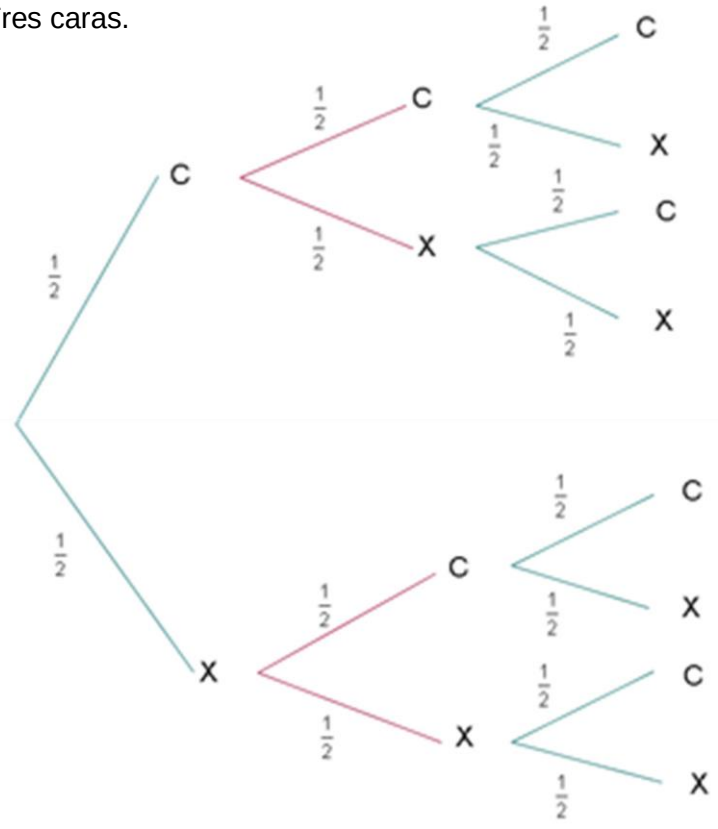
p (2 niñas y 1 niño) = $\frac{10}{16} * \frac{6}{15} * \frac{5}{14} + \frac{6}{16} * \frac{10}{15} * \frac{5}{14} + \frac{6}{16} * \frac{5}{15} * \frac{10}{14} = 0{,}268$

4) Seleccionar tres niñas.

p (3 niñas) = $\frac{6}{16} * \frac{5}{15} * \frac{4}{14} = 0{,}0357$

Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras.



p(3c) = $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Ejercicio 34

En una urna hay dos bolas rojas y tres verdes. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento (sin meter la bola que se saca). Realiza el desarrollo del correspondiente diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que salgan dos rojas y una verde.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Escribe algunos ejemplos de experimentos deterministas.

- El sol sale por el Este y se pone por el Oeste.
- El agua hierve a 100º C.
- Si tiro con fuerza un vaso de vidrio al suelo se romperá.

Ejercicio 2

Lee el párrafo que aparece abajo y completa las palabras que faltan:

Lanzar un dado es un experimento **aleatorio**.

El resultado de dividir 10 entre 2 es un experimento **determinista**.

Lanzar una moneda al aire es un experimento **aleatorio**.

Sacar una carta de una baraja española es un experimento **aleatorio**.

Saber el resultado de elevar un número al cuadrado es un experimento **determinista**.

Conocer el tiempo que hará mañana se trata de un experimento **aleatorio**.

Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 verdes es un experimento **aleatorio**.

Ejercicio 3

¿Qué es el espacio muestral? ¿Por qué letra se representa?

Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento. Se representa con la letra E

Ejercicio 4

¿Cuál es el espacio muestral de un dado de 8 caras?

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Ejercicio 5

¿Qué es un suceso?

Un evento o Suceso corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

Ejercicio 6

En el experimento "lanzar un dado de 6 caras" escribe el espacio muestral y los sucesos A "múltiplo de 3" y B "menor que 3".

El espacio muestral viene dado: E ={1,2,3,4,5,6}

El suceso A: A={3,6}

El suceso B: B={1,2}

Ejercicio 7

Completa la tabla:

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar una moneda	E={cara, cruz}	cara (C) y cruz (X)
Lanzar un dado	E={1,2,3,4,5 y 6}	1,2,3,4,5,6

Ejercicio 8

Escribe 4 ejemplos de sucesos compuestos en el experimento "sacar cartas de una baraja española"

A={salir ases}

B={salir copas}

C={salir figuras}

D={salir Reyes}

Ejercicio 9

En el experimento "lanzar un dado de 8 caras", cuatro sucesos compuestos serían:

A={Salir número impar}

B={Salir múltiplo de 2}

C={salir menor que 6}

D={salir mayor 4}

Ejercicio 10

¿Qué es un suceso seguro?

Un suceso seguro está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral por lo que ocurre siempre

Ejercicio 11

Inventa un ejemplo que sea suceso seguro.

Al sacar una bola de una caja que sólo contiene bolas azules un suceso seguro sería sacar una bola azul.

Otro ejemplo sería al lanzar u.

Ejercicio 12

	V / F
De una baraja española de 40 cartas un suceso seguro sería sacar picas	**F**
En una bolsa con 5 bolas rojas y 3 negras un suceso seguro sería sacar una bola verde	**F**
Si tenemos una caja con fichas numeradas del 1 al 4 un suceso seguro sería sacar una ficha con un número menor que 5	**V**
Un suceso imposible sería si al lanzar 2 dados al aire y sumar la puntuación de sus caras obtener 0	**V**
Al lanzar un dado al aire un suceso seguro sería salir un número mayor que 6	**F**

Ejercicio 13

Escribe un ejemplo de suceso compatible:

Por ejemplo en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir figura}

Ambos sucesos serían compatibles porque tienen 3 cartas en común: sota, caballo y rey de oros

Ejercicio 14

Por ejemplo, en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir copas}

Razona si los sucesos son compatibles o incompatibles

Ambos sucesos no se pueden dar al mismo tiempo. Si saco una carta que sea del palo "oros" no es compatible con sacar una carta que sea del palo "copas".

Ejercicio 15

Piensa un ejemplo de sucesos independientes.

Extraer dos cartas de una baraja, con reposición, son sucesos independientes.

Ejercicio 16

Un ejemplo de suceso dependiente sería...

Por ejemplo si tenemos una bolsa con calcetines y pañuelos un suceso dependiente sería ir sacando prendas de la bolsa sin reposición.

Ejercicio 17

Escribe los sucesos contrarios en los siguientes casos:

A={1,2}

B={1,5}

C={2,5}

D={3,4,5,6}

En el experimento lanzar un dado de 8 caras los sucesos contrarios serían:

A={1,2} A'={3,4,5,6}

B={1,5} B'={2,3,4,6}

C={2,5} C'={1,3,4,5,6}

D={3,4,5,6} D'={1,2}

Ejercicio 18

De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:

a) A={Salir una figura} , B={Salir un oro} SI

b) A={Salir el as de bastos}, B={Salir el as de copas} NO

c) A={Salir una copa}, B={Salir el siete de copas} SI

Ejercicio 19

En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a: A={Sacar un número par menor que 5}; B={1,2,6}; C={3}

A = {1,3,5,6}

B = {3,4,5}

C = {1,2,4,5,6}

Ejercicio 20

Solución

a) La probabilidad de que B ocurra depende de si A ha ocurrido o no, ya que si A ocurre, es más fácil que ocurra B en la segunda que si A no ha ocurrido.

b) En este caso B no depende de A, porque tanto si A ocurre como si no, la urna tiene la misma configuración en la segunda extracción.

Ejercicio 21

Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

a) **¿Cuál es el espacio muestral?**
b) **A="obtener numero primo", B="múltiplo de 3". Escribe los sucesos, A, B , A', B' , A ∩ B, AUB, AUA' y A ∩ A'**

a) E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

b) A={2,3,5,7}; B={3,6,9}; A'={1,4,6,8,9,10}, B'={1,2,4,5,7,8,10}, AUB={2,3,5,6,7,9}, A ∩ B={3}, AUA=E, A ∩ A'=Ø

Ejercicio 22

Lanzamos dos veces una moneda:

a) **Escribe todos los sucesos elementales**
b) **Escribir el suceso S={la primera sale cara}**
c) **Escribir suceso incompatible con S**

a) Podemos entender el experimento de dos formas

1) Ver el número de caras E={0 caras, 1 cara, 2caras}. No son equiprobables
2) Distintas situaciones (importa el orden). E={cc,cx,xc,xx}. Son equiprobables: un espacio muestral es equiprobable si todos los elementos que lo conforman tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

b) S={cx,cc}

c) A={salen dos caras}={cc}

Ejercicio 23

En una urna hay tres bolas rojas, dos verdes y cinco blancas. Se saca una bola anotando el color de la bola extraída. Determina la probabilidad de los sucesos: {Salir roja}, {Salir verde} y {Salir blanca}.

$$P(Salir_{roja}) = \frac{3}{10}$$

$$P(Salir_{verde}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(Salir_{blanca}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 24

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, determian la probabilidad de los sucesos A = {Salir una figura de copas}, B = {Salir un tres} y C ={Salir una sota}. Calcula también $P(B^c)$.

$P(A) = 0.075$

$P(B) = 0.1$

$P(C) = 0.1$

$P(B^c) = 0.9$

Ejercicio 25

Calcula la **probabilidad del suceso contrario** en los siguientes casos:

Experimento "lanzar un dado de 6 caras":

Suceso	Probabilidad del suceso contrario
A={Sacar un número menor que 4}={1,2,3}	P(A)=1- (3/6) = 3/6
B={Sacar un número impar}={1,3,5}	P(B)=1- (3/6) = 3/6
C={{Sacar un múltiplo de 2}={2,4,6}	P(C)= 1- (3/6) = 3/6
D={Sacar un número mayor 6} = {0}	P(D) = 1 -(0/6) = 1

Ejercicio 26

La probabilidad de un suceso es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

P(A') 1- 0,3 =0,7

Ejercicio 27

Inventa 2 ejemplos de un suceso seguro y calcula su probabilidad.

Ejemplo 1: Sacar una bola roja dentro de una caja dónde sólo tenemos bolas rojas.

P(A)=1

Ejemplo 2: Sacar un número menor de 7 cuando lanzo un dado de 6 caras.

P(B) = 1

Ejercicio 28

Inventa 2 sucesos imposibles y calcula su probabilidad.

Ejemplo 1: Sacar un pañuelo rojo dentro de una caja done sólo hay calcetines.

P(A) = 0

Ejemplo 2: Sacar una carta de picas de una baraja española.

P(B) = 0

Ejercicio 29

Lanzamos dos dados y sumamos sus resultados. Dados los sucesos A={salir más de 5}, B={salir un número par} y C={salir 2}, determina:

a) P(A) $\frac{26}{36} = 0{,}72$

b) P(B) $\frac{18}{36} = 0{,}5$

c) P(C) $\frac{1}{36} = 0{,}027$

d) P(A U B) $\frac{26}{36} + \frac{18}{36} - \frac{14}{36} = \frac{30}{36} = 0{,}83$

e) P(B U C) $\frac{18}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = 0{,}5$

f) P(A U C) $\frac{26}{36} + \frac{1}{36} = \frac{27}{36} = 0{,}75$

g) P(A U B U C) $\frac{26}{36} + \frac{18}{36} + \frac{1}{36} - \frac{14}{36} - \frac{1}{36} = 0{,}83$

Ejercicio 30

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

Casos posibles 6 {1,2,3,4,5,6}

Casos favorables (menor que 5): 4 {1,2,3,4} P (menor que 5) = 4/6

Casos favorables (número par): 3 {2,4,6} P (número par) = 3/6

Como 2 y 4 son menores que 5, y al mismo tiempo son pares, se estarían considerando como casos favorables dos veces.

Por lo tanto, la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par, al lanzar un dado se expresa como:

P (< 5) ó P(par) = P(<5) U P(par) – P(<5 ∩par)= P(< 5) + P(par) – P(<5 y par)= 4/6 + 3/6 – 2/6 = 5/6

Ejercicio 31

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el fútbol(B) p(B/A)= 145/196
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el fútbol(B') p(B'/A)= 51/196
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el fútbol(B) p(B/A')=42/138
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste fútbol(B') p(A'/B')= 96/138
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea varón(A) p(A/B)= 145/187
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea mujer(A') p(A'/B)= 42/187

Ejercicio 32

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el fútbol(B) p(B/A)= 145/196
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el fútbol(B') p(B'/A)= 51/196
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el fútbol(B) p(B/A')=42/138
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste fútbol(B') p(A'/B')= 96/138
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea varón(A) p(A/B)= 145/187
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea mujer(A') p(A'/B)= 42/187

Ejercicio 33

Extraemos una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta sea rey de oros, sabiendo que la carta extraída es una figura.

1/12

Ejercicio 34

En una urna hay dos bolas rojas y tres verdes. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento (sin meter la bola que se saca). Realiza el desarrollo del correspondiente diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que salgan dos rojas y una verde.

P({dos rojas y una verde})= $\frac{2}{3}*\frac{1}{4}*1+\frac{2}{5}*\frac{3}{4}*\frac{1}{3}+\frac{3}{5}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=0{,}36$

TAREAS TEMA 6: PROBABILIDAD.

1. Escribe al frente de cada una "a" si corresponde a un fenómeno aleatorio y "d" si corresponde a un fenómeno determinista.

a) Ir a la escuela de lunes a viernes……
b) Ganar el premio de la lotería……
c) Bañarse todos los días……
d) La semana tiene 7 días……
e) Las niñas escogerán un papelito de una bolsa, la que escoja el papelito que dice "reina", ganará……..

2. Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.
b) Se lanza un dado de quinielas, que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2, se espera que se pose sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.
c) Se extrae, sin mirar, una bola de una urna que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

3. Se lanza una moneda de un euro y se anota el resultado de la cara superior.

a) Establece los distintos tipos de sucesos. (elemental, compuesto, seguro, imposible)
b) Escribe el espacio de sucesos.

4. Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y se anota el número de la cara superior. Determina estos tres sucesos y sus contrarios.
A "salir impar"; B "salir número menor que 4"; C "salir número mayor que 8".

5. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores. Sacamos una bola y anotamos su color.
a) ¿Es una experiencia aleatoria?
b) Escribe el espacio muestral.
c) Inventa cinco sucesos y di como son.

6. Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña. Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.
a) ¿Es una experiencia aleatoria?
b) Escribe el espacio muestral.
c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso y di como son.

7. Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate. Saca un bombón y ve si es de chocolate.
¿Es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?

8. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.
a) ¿Qué tipo de suceso es extraer la bola 17?
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17? Exprésalo en fracción y %
c) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17? Exprésalo en fracción y %

9. Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener: Exprésalo en fracción y %
a) El as de espadas.
b) El rey de bastos.
c) Una figura (sota, caballo o rey).
d) Una copa.

10. En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos.
Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo? Exprésalo en fracción y %

11. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par? Expresalo en fracción y %

12. Calcula la probabilidad de al sacar una carta de una baraja española (40 cartas), esta sea una figura o un 7

13. En una reunión hay 15 personas:

Sexo	Gafas
Mujeres 8	3 con gafas
Hombres 7	2 con gafas

¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona que sea mujer y lleve gafas?

14. Una urna contiene 4 bolas verdes y 8 azules. Si extraemos dos bolas con reemplazamiento es decir, devolviéndolas a la urna en cada caso.
a) Haz el diagrama de árbol
b) Calcula la probabilidad de que las dos bolas, sean azules.
c) Calcula la probabilidad de que las dos bolas, sean del mismo color.

15. Escribimos cada una de las letras de la palabra LÁPIZ en un papel y las ponemos en una bolsa. Si extraemos dos letras, sin reemplazamiento.
a) Haz un diagrama de árbol
b) Calcula la probabilidad de sacar, dos vocales.
c) Calcula la probabilidad de sacar, una vocal y una consonante

AUTOEVALUACIÓN TEMA 6: PROBABILIDAD.

1.- Indica cuál de los siguientes experimentos es aleatorio
a) Después de miércoles sigue jueves……..
b) Diciembre tiene 31 días……
c) El año tiene 12 meses……
d) Escoger al azar un apellido en el directorio telefónico

2. Tiramos una moneda cual es su espacio muestral
a) E={cara, cruz}
b) E={cara}
c) E={cruz}
d) E={(cara, cara); (cara,cruz); (cruz, cara); (cruz, cruz)}

3. Se lanza un dado, indica el tipo de suceso que es que salga un 3:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

4. Se lanza un dado, que tipo de suceso es que salga un número par:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

5. Se lanza un dado que tipo de suceso es que salga un número menor de 7:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

6. Se lanza un dado que tipo de suceso es que salga un número mayor de 7:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

7. Calcula la probabilidad coger una manzana de un frutero que tiene 8 manzana y 4 naranjas con los ojos cerrados.
a) 2/3
b) 1/3
c) 1
d) 1/2

8. Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado salga un numero par o el 5
a) 3/6
b) 2/3
c) 1/6
d) 2/6

9. Calcula la probabilidad al lanzar un dado de sacar un 5 sabiendo que ha salido un número impar.
a) 2/3
b) 1/3
c) 1/6
d) 2/6

10. Una pareja tiene 3 hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean chicos.
a) 1/8
b) 1/2
c) 2/ 8
d) ¼

SOLUCIONES

1.- Indica cuál de los siguientes experimentos es aleatorio
a) Después de miércoles sigue jueves……..
b) Diciembre tiene 31 días……
c) El año tiene 12 meses……
d) Escoger al azar un apellido en el directorio telefónico

2. Tiramos una moneda cual es su espacio muestral
a) E={cara, cruz}
b) E={cara}
c) E={cruz}
d) E={(cara, cara); (cara,cruz); (cruz, cara); (cruz, cruz)}

3. Se lanza un dado, indica el tipo de suceso que es que salga un 3:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental

d) Suceso imposible

4. Se lanza un dado, que tipo de suceso es que salga un número par:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

5. Se lanza un dado que tipo de suceso es que salga un número menor de 7:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

6. Se lanza un dado que tipo de suceso es que salga un número mayor de 7:
a) Suceso compuesto
b) Suceso seguro
c) Suceso elemental
d) Suceso imposible

7. Calcula la probabilidad coger una manzana de un frutero que tiene 8 manzana y 4 naranjas con los ojos cerrados.
a) 2/3
b) 1/3
c) 1
d) 1/2

8. Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado salga un numero par o el 5
a) 3/6
b) 2/3
c) 1/6
d) 2/6

9. Calcula la probabilidad al lanzar un dado de sacar un 5 sabiendo que ha salido un número impar.
a) 2/3
b) 1/3
c) 1/6
d) 2/6

10. Una pareja tiene 3 hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean chicos.
a) 1/8
b) 1/2
c) 2/ 8
d) 1/4

Bloque 12. Tema 7.

Movimientos y fuerzas

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

1) MOVIMIENTO.
   1.1. Sistema de referencia.
   1.2. Magnitudes.
   1.3. Unidades.
   1.4. Trayectoria.

2) MRU.
   2.1. Fórmulas.
   2.2. Gráficas.
   2.3. Problemas.

3) MRUA.
   3.1. Fórmulas.
   3.2. Gráficas.
   3.3. Problemas.

4) MCU.
   4.1. Fórmulas.
   4.2. Relación entre magnitudes lineales y angulares.
   4.3. Problemas.

5) CONCEPTO DE FUERZA.
   5.1. Composición de fuerzas.
   5.2. Descomposición de fuerzas.

6) TIPOS DE FUERZAS.
   6.1. Peso.
   6.2. Normal.
   6.3. Fuerza de rozamiento.

7) LEYES DE NEWTON.
   7.1. Principio de inercia.
   7.2. Principio fundamental de la dinámica.
   7.3. Principio de acción y reacción.

8) LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

9) PRESIÓN.

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a tratar dos partes fundamentales de la Física: la Cinemática y la Dinámica y cómo se aplican en la vida real.

La **Cinemática** estudia el **movimiento**, desde el que realiza una simple hormiga que se mueve por una mesa, hasta el que sigue La Tierra alrededor del Sol.

La **Dinámica** se encarga de analizar las causas de esos movimientos, es decir de las **fuerzas**. Entender las fuerzas significa saber por qué se mueven las cosas y sus efectos cubren todo un abanico de intensidades, porque tanto un terremoto como un parpadeo son consecuencia de fuerzas. En cada una de estas dos situaciones también podemos detectar movimiento.

1) MOVIMIENTO

Un cuerpo se mueve si cambia su posición respecto al sistema de referencia, en caso contrario decimos que está en reposo. Por comodidad, a un objeto que se mueve, **le vamos a llamar "móvil"**, aunque no coincida exactamente con el concepto de móvil que estás pensando.

Por lo tanto, lo primero que tenemos que definir es el **sistema de referencia**. A continuación veremos las **magnitudes** que intervienen en el estudio del movimiento, acompañadas de sus correspondientes **unidades**. Por último veremos las **trayectorias** que puede seguir un móvil, que dan lugar a los diferentes tipos de movimientos que trataremos en las siguientes preguntas.

1.1) SISTEMA DE REFERENCIA

La **posición** es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio con respecto a un punto que consideramos fijo. El sistema de referencia es el marco con respecto al cual vamos a indicar la posición de un cuerpo.

Antes de comenzar el estudio de los movimientos, es preciso indicar que se dice que un cuerpo está en **reposo** cuando su posición no varía con respecto a un punto fijo y que se toma como referencia a medida que transcurre el tiempo. En caso contrario se dice que el objeto está en **movimiento**. Es de interés resaltar que no existen puntos de referencia fijos y que todos están dotados de movimiento. Los cuerpos que aparecen en reposo con respecto a nosotros, tales como un árbol o una casa, se mueven con la Tierra y ésta, como los demás planetas, alrededor del Sol, el cuál, a su vez, se mueve en el Universo. En consecuencia, resulta evidente que el concepto de reposo es relativo.

En Física, un sistema de referencia es un punto y un sistema de ejes, que suponemos fijos en el Universo, y que se toman como referencia para medir la distancia a la que se encuentra el objeto.

Entre los puntos que forman el sistema de referencia hay que destacar el origen de coordenadas (O). Es el punto donde se cruzan los ejes de coordenadas. Es el punto de origen de las medidas por lo que le corresponden las coordenadas.

Se utilizan tres sistemas de referencia, dependiendo de las dimensiones necesarias para describir el movimiento:

- Una dimensión - Movimientos Lineales
- Dos dimensiones - Movimientos en el Plano
- Tres dimensiones - Movimientos en el Espacio

A partir de ahora vamos a utilizar sólo una dimensión.

1.2) MAGNITUDES

Antes de comenzar con el estudio de los movimientos debemos conocer sus magnitudes y unidades.

Magnitud física es todo aquello que se puede medir (el tiempo, la masa, el espacio, el volumen, etc.). Hay otras cualidades que no se pueden medir, como el color, el olor, etc.

Hay dos tipos de magnitudes:

- **Fundamentales**: Son aquellas que se definen por si solas. Por ejemplo, la masa, el tiempo, el espacio, etc.
- **Derivadas**: Son aquellas que se definen a partir de otras; necesitan de otras para conocer su valor. Por ejemplo, la velocidad, la aceleración, la densidad, etc. Es decir, tenemos que hacer una operación matemática para conocer su valor.

En física hay muchas magnitudes, pero en cinemática emplearemos, como fundamentales espacio (e) y tiempo (t) y como derivadas velocidad (v) y aceleración (a).

Velocidad (v): Es el espacio recorrido por un objeto en la unidad de tiempo. Hay que distinguir entre velocidad media y velocidad instantánea, pero esto lo iremos viendo poco a poco.

Aceleración (a): Nos indica el ritmo o tasa con la que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en función del tiempo.

1.3) UNIDADES

Unidad es en lo que se mide una magnitud, en lo que se expresa. Todas las magnitudes físicas tienen muchas unidades con las cuales se pueden expresar. Conviene recordar el Sistema Métrico Decimal, así como el **Sistema Internacional de Unidades (S.I.)**, que se estudian en el Módulo 2.

Por ejemplo, una distancia se puede medir en metros (m), en centímetros (cm) o en kilómetros (km) y tienes que recordar cómo se pasa de una unidad a otra.

Las magnitudes que utilizaremos en Cinemática, con sus unidades son:

MAGNITUDES	UNIDADES
Espacio (e)	metro (m)
Tiempo (t)	segundo (s)
Velocidad (v)	m/s
Aceleración (a)	m/s^2

1.4) TRAYECTORIA

Para clasificar los movimientos debemos conocer su trayectoria.

Se define la **trayectoria** como la **sucesión de puntos por donde pasa un móvil**. Hay dos tipos de movimientos según sea su trayectoria:

- **Rectilíneo**: cuando su trayectoria es una recta.
- **Curvilíneo**: cuando su trayectoria una curva. El más conocido es el **movimiento circular**.

Espacio recorrido es la longitud de la trayectoria descrita por un cuerpo. **Desplazamiento** es la diferencia entre la posición inicial y final de un cuerpo. Ambas magnitudes son longitudes y su unidad en el S.I. es el **metro (m)**.

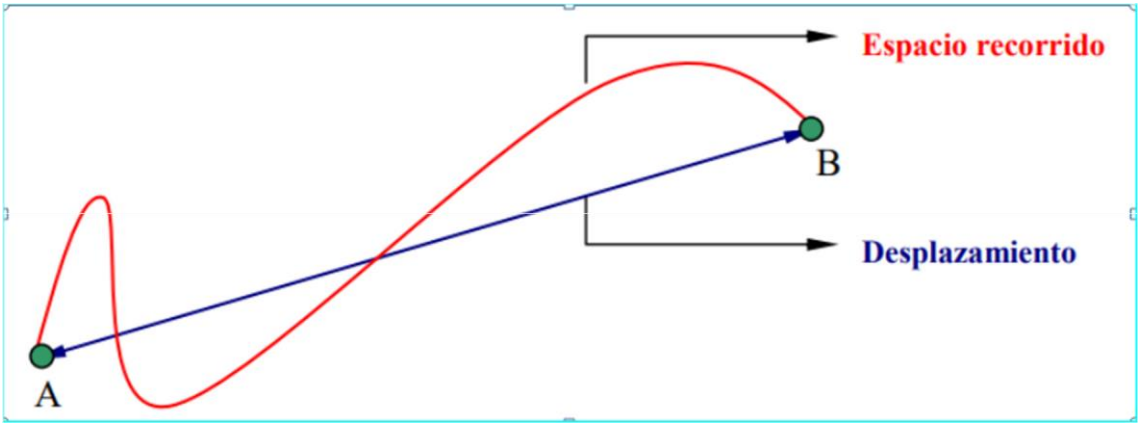


Imagen 1: Trayectoria. Fuente: Elaboración propia.

Sólo coincidirá espacio recorrido y desplazamiento en el caso de que la trayectoria sea rectilínea y el móvil no cambie de sentido

2) MRU

El movimiento rectilíneo y uniforme (MRU) es aquel cuya trayectoria es la línea recta y **su velocidad** (módulo, dirección y sentido) **permanece constante**, no varía, durante todo el recorrido.

2.1) FÓRMULAS

La ecuación que usaremos para resolver los problemas de este tipo de movimiento es:

$$v = \frac{e}{t}$$

Y las que se obtienen despejando el espacio y el tiempo:

$$\begin{cases} e = v \cdot t \\ \text{y} \\ t = \frac{e}{v} \end{cases}$$

En este movimiento, coinciden la velocidad instantánea con la velocidad media, ya que la velocidad, siempre es la misma.

2.2) GRÁFICAS

Existen dos graficas:

A) Gráfica espacio-tiempo (e - t):

En esta gráfica se representa el espacio en el eje de ordenadas y el tiempo en el eje de abscisas. Hay que dar valores al tiempo, y mediante la ecuación se calcula el espacio recorrido en cada tiempo, completándose así, la tabla de valores.

Ejemplo 1: Un hombre camina a una velocidad constante de 2 m/s. Representa su grafica e-t.

Lo primero que hay que hacer es la tabla de valores que corresponde a la función:
e = 2 · t

t	0	1	2	3
e	0	2	4	6

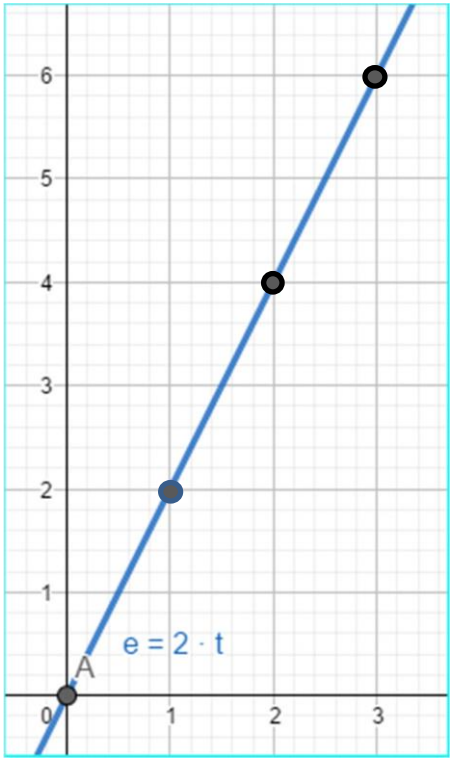


Imagen 2: Gráfica e-t. Fuente: Elaboración propia.

Características de la gráfica:

- Siempre sale una línea recta.
- Siempre pasa por el punto (0,0).
- La pendiente de la recta viene dada por la velocidad, cuanto mayor sea la velocidad del móvil, mayor es la pendiente.

B) Grafica velocidad-tiempo (v - t):

En esta gráfica se representa la velocidad en el eje de ordenadas y el tiempo en el eje de abscisas. Como la velocidad no varía, se trata de una función constante, ya que para cualquier valor del tiempo la velocidad siempre vale lo mismo.

Ejemplo 2: Un hombre camina a una velocidad constante de 2 m/s. Representa su grafica v-t.

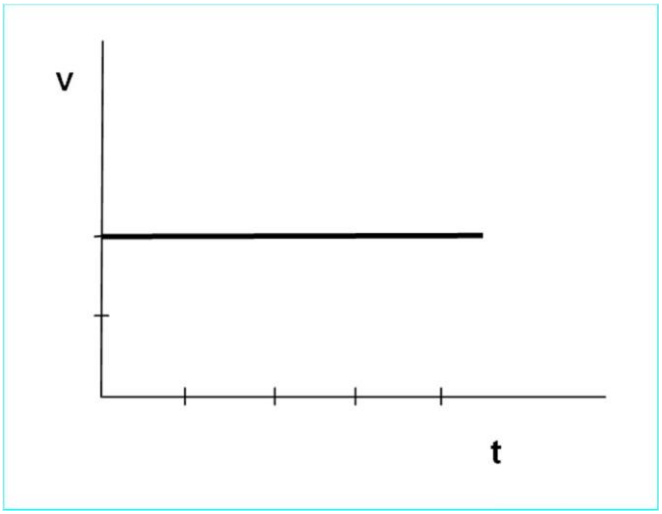


Imagen 3: Gráfica v-t.
Fuente: Elaboración propia.

2.3) PROBLEMAS

Para resolver un problema se recomienda seguir los siguientes pasos:

1º) Se ponen los datos conocidos, con sus correspondientes unidades.
2º) Se revisan las unidades y en caso necesario se cambian, para que todas estén en el S.I.
3º) Se elige la fórmula a utilizar.
4º) Se calcula la incógnita pedida.
5º) Se analiza el resultado obtenido.

Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 3: Si un coche va a una velocidad de 25 m/s, calcular qué espacio recorrerá en 2 h.

1º) Datos: v = 25 m/s, t = 2 h
2º) Unidades: hay que pasar las horas a segundos, 2 h · 3600 s/h = 7200 s
3º) Fórmula: e = v · t ,
4º) Cálculos: e = 25 · 7200 = **180000 m**.
5º) Análisis: Es correcto, ya que si recorre 25 m en un segundo, en 7200 s, recorrerá 180000 m.

Ejercicio 1

Si un coche tarda 1,5 h en recorrer una distancia de 200 km, ¿cuál será su velocidad media?

Ejercicio 2

Una persona recorre un tramo de 600 metros a la misma velocidad, invirtiendo un tiempo de 10 minutos, después se detiene durante cinco minutos y luego vuelve a caminar, también a velocidad constante, recorriendo 300 metros en cinco minutos. Calcula la velocidad en cada tramo del recorrido en m/s.

3) MRUA

Es aquel cuya trayectoria es una línea recta, y **su velocidad** no permanece constante, **varía con el tiempo**, es decir, es aquel que tiene aceleración y que además es constante.

3.1) FÓRMULAS

Las ecuaciones que verifican este tipo de movimiento son:

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad v = v_0 + a \cdot t$$

Donde:

e → es el espacio recorrido en metros
v_0 → es la velocidad inicial en m/s
t → es el tiempo en segundos
a → es la aceleración en m/s^2
v → es la velocidad en un determinado momento del recorrido en m/s, es decir, es la velocidad instantánea.

Si quisiéramos calcular la velocidad media (v_m) de todo el recorrido, aplicaríamos la ecuación:

$$\mathbf{v_m = e/t}$$

Cuando un cuerpo cae por la acción de la gravedad, el movimiento que sigue es uniformemente acelerado y su aceleración es la gravedad (g), quedando las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2} \qquad \mathbf{v = v_0 + g \cdot t}$$

Veremos más adelante cuánto vale la gravedad.

3.2) GRÁFICAS

Existen dos gráficas:

A) Gráfica espacio-tiempo (e - t) :

El tiempo se representa en el eje "x" y el espacio en el eje "y". Se dan valores al tiempo y mediante la ecuación del espacio se calcula el espacio recorrido en cada tiempo.

Si queremos representar el espacio que recorre un móvil que lleva una velocidad inicial de 30 m/s y una aceleración de 20 m/s^2, sustituimos estos datos en la fórmula del espacio:

$$e = 30 \cdot t + 1/2 \cdot 20 \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e = 30t + 10t^2}$$

Resulta una función cuadrática, que para representar, completamos la siguiente tabla de valores:

t	0	1	2	3	4
e	0	40	100	180	280

Representando estos datos en unos ejes de coordenadas, obtenemos la siguiente gráfica:

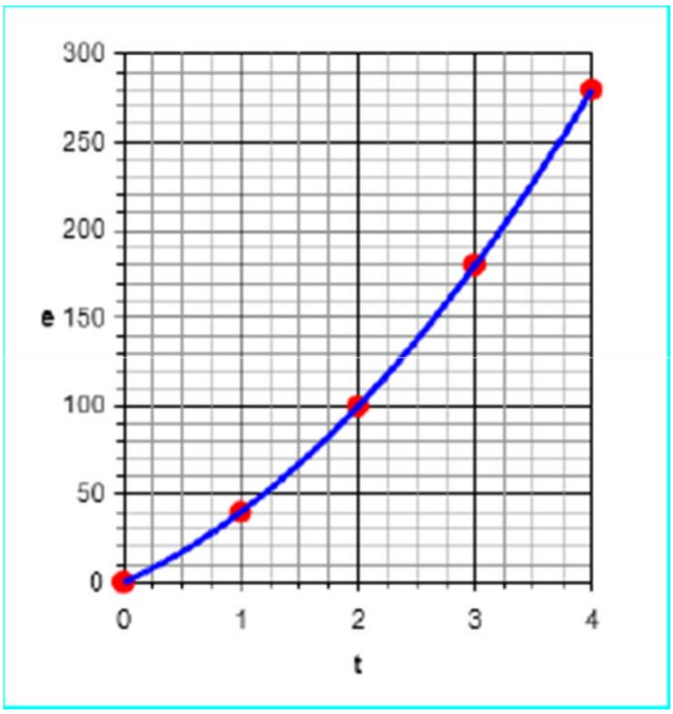


Imagen 4: Gráfica e-t. Fuente: Elaboración propia.

Características de la gráfica:

- Siempre pasa por el punto (0,0).
- Siempre nos sale una parábola.
- La abertura de las ramas viene dada por la aceleración, cuanto mayor sea la aceleración menor es la abertura y viceversa.

B) Gráfica velocidad-tiempo (v - t) :

El tiempo se representa en el eje " x " y la velocidad en el eje " y ". Se dan valores al tiempo y mediante la ecuación de velocidad se calcula la velocidad en cada tiempo.

Para el mismo ejemplo anterior, la función a representar sería;

v = 30 + 20t

Y dándole valores al tiempo, resulta la siguiente tabla de valores:

t	0	1	2	3	4
v	30	50	70	90	110

Representando estos datos en unos ejes de coordenadas, obtenemos la siguiente gráfica:

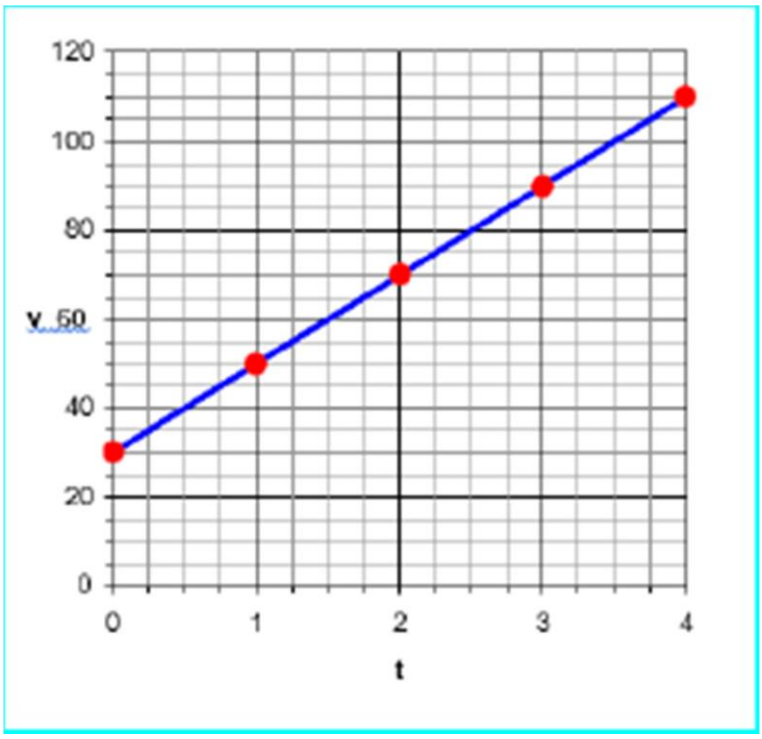


Imagen 5: Gráfica v-t. Fuente: Elaboración propia.

Características de la gráfica:

- Siempre sale una línea recta.
- No siempre pasa por el punto (0,0).

- La pendiente de la recta viene dada por la aceleración, cuanto mayor es la aceleración mayor es la pendiente.
- Si el movimiento tuviera aceleración negativa, es decir, si disminuye la velocidad con el tiempo, la recta sería decreciente y el punto de corte de la gráfica con el eje del tiempo, nos daría el tiempo que tarda el móvil en pararse.

3.3) PROBLEMAS

Vamos a seguir los mismos pasos recomendados en el apartado "2.3", con un ejemplo.

Ejemplo 4: Un ciclista se está moviendo a 12 m/s cuando tiene que frenar al cruzársele un gato a 2,5 m delante de él. Consigue detenerse transcurridos 0,4 segundos. Se pide:

a) ¿Qué aceleración tuvo el ciclista?

b) ¿Qué distancia recorrió antes de detenerse?

c) ¿Atropelló al gato?

Resolución:

1º) Datos: v_0 = 12 m/s; v = 0 (puesto que se detiene); t = 0,4 s; distancia al gato = 2,5 m

2º) Unidades: En este caso no hay que hacer cambios.

3º) Fórmulas: $e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $\quad$ $v = v_0 + a \cdot t$

4º) Cálculos:

a) Utilizando la formula: " $v = v_0 + a \cdot t$" y sustituyendo los datos que tenemos, podemos calcular la aceleración del ciclista:

$0 = 12 + a \cdot 0{,}4 \rightarrow$ despejando: $a = -12/0{,}4 \rightarrow$ **$a = -30\ m/s^2$**.

b) De forma análoga pero con esta fórmula: "$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$" podemos calcular el espacio recorrido: $e = 12 \cdot 0{,}4 + ½ \cdot (-30) \cdot 0{,}4^2 = 4{,}8 - 2{,}4 \rightarrow$ **e = 2,4 m**

5º) Análisis: Es lógico que nos salga una aceleración negativa ya que el ciclista va frenando. El espacio que nos sale hasta que se para nos permite contestar a la tercera cuestión:

c) Según el resultado obtenido en el apartado anterior vemos que el ciclista recorre 2,4 m antes de detenerse. Como el gato estaba a 2,5 m del ciclista cuando éste comienza a frenar, podemos concluir que **el gato se salva por los pelos**.

Ejercicio 3

Si un coche cambia su velocidad de 72 km/h a 90 km/h de manera progresiva en 10 s, ¿cuál es su aceleración?

Ejercicio 4

Un tren que en un instante dado tenía una velocidad de 15 m/s adquirió una aceleración de –3 m/s^2 durante 2 s. Calcula su velocidad final y la distancia que recorrió al cabo de esos 2 s.

4) MCU

Los movimientos de trayectoria curvilínea son muchos más abundantes que los movimientos rectilíneos.

El movimiento circular uniforme está presente en multitud de situaciones de la vida cotidiana: las manecillas de un reloj, las aspas de un aerogenerador, las ruedas, el plato de un microondas, las fases de la Luna...

En el movimiento circular uniforme (MCU) el móvil describe una **trayectoria circular con velocidad constante**. Es decir, recorre arcos iguales en tiempos iguales.

4.1) FÓRMULAS

La unidad de medida de **ángulo (φ)** en el S.I. es el **radian (rad)**. Existe una relación matemática sencilla entre los arcos descritos y los ángulos que sustentan: "el ángulo es la relación entre el arco y el radio con que ha sido trazado".

Si llamamos ΔS al arco recorrido e $\Delta\varphi$ al ángulo barrido por el radio: **$\Delta\varphi = \Delta S/R$**

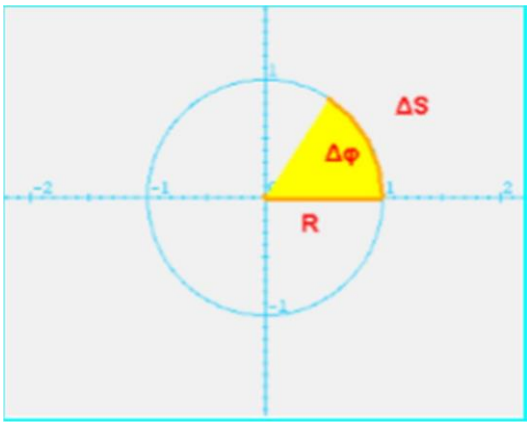


Imagen 6: MCU. Fuente: Desconocida.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida

El radian es el ángulo cuya longitud del arco es igual al radio.

Por lo tanto, una circunferencia completa equivale a 2πrad.

La **velocidad angular (ω)** en el MCU es el ángulo barrido, $\Delta\varphi$, en un intervalo de tiempo, Δt.

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t$$

La unidad de velocidad angular en el S.I es el radián por segundo (**rad/s**). La velocidad angular se expresa también en **revoluciones por minutos (rpm)**.

Su equivalencia es: 1 rpm = 2π/60 rad/s

4.2) RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES LINEALES Y ANGULARES

Cuando un disco gira, la velocidad lineal definida sobre la trayectoria y la velocidad angular definida sobre el ángulo barrido en un tiempo dado se producen de forma simultánea. Por lo tanto, es posible establecer una relación entre la velocidad lineal y la angular.

Para llegar a ello tenemos que recordar la primera fórmula del apartado anterior:

$$\Delta\varphi = \Delta S/R$$

Si despejamos el espacio lineal, tendremos: $\Delta S = \Delta\varphi \cdot R$

Como por definición, la velocidad lineal es: $v = \Delta S/t$

La relación entre ambas velocidades será: $v = \omega \cdot R$

4.3) PROBLEMAS

Veamos un ejemplo de problema de MCU:

Ejemplo 5: Una rueda de coche tarda 20 s en recorrer 500 m. Si su radio es de 25 cm, halla su velocidad lineal y su velocidad angular.

Resolución:

1º) Datos: t = 20 s; ΔS = 500 m; R = 25 cm

2º) Unidades: En este caso hay que hacer el siguiente cambio: R = 0,25 m

3º) Fórmulas: "**$v = \Delta S/t$**" y "**$v = \omega \cdot R$**"

4º) Cálculos: v = 500/20 = 25 m/s; luego ya tenemos la **velocidad lineal: v = 25 m/s**

Para calcular la **velocidad angular**, despejamos en la segunda fórmula: ω = v/R = 25/0,25 = **100 rad/s**

5º) Análisis: Es lógico.

5) CONCEPTO DE FUERZA

La fuerza puede definirse como **toda acción o influencia capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo**.

La fuerza es una **magnitud vectorial** y se representan mediante un vector. Para definir un vector, y por lo tanto una fuerza, debemos conocer las siguientes características:

- Módulo: es el valor numérico de la fuerza, la cuantía de la fuerza. La unidad en que se miden las fuerzas es el Newton (N)
- Dirección: es la recta que incluye a la fuerza.
- Sentido: es la orientación que toma el vector (fuerza) dentro de su dirección. Todas las direcciones tienen dos sentidos.
- Punto de aplicación: es el punto donde se ejerce la fuerza. Salvo que se diga lo contrario, coincidirá con el centro de gravedad del cuerpo, que es su centro geométrico.

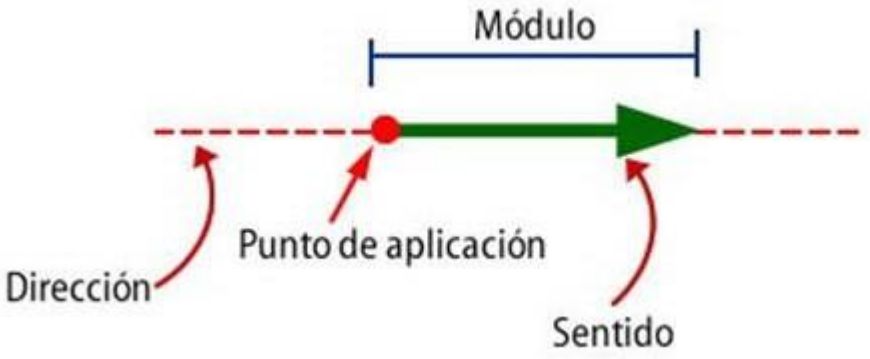


Imagen 7: Vector. Fuente: Elaboración propia.

La unidad de fuerza en el S.I. es el **newton (N)**, aunque también se utiliza el **kilopondio (kp).**

Más adelante veremos su definición y su relación.

Ejercicio 5

En unas rebajas, dos personas intentan arrebatarse mutuamente un jersey que ambas sujetan, ¿Cuál de las dos logrará su objetivo?

	a) La que tenga más edad
	b) La que tenga peor carácter
	c) La que tire con más fuerza

5.1) COMPOSICIÓN DE FUERZAS

Componer varias fuerzas consiste en calcular una fuerza única (resultante) que haga el mismo efecto que todas ellas juntas.

Los principales casos que pueden darse son:

1.- Fuerzas de la misma dirección y sentido: La resultante es otra fuerza de la misma dirección y sentido, y de módulo, la suma de los módulos.

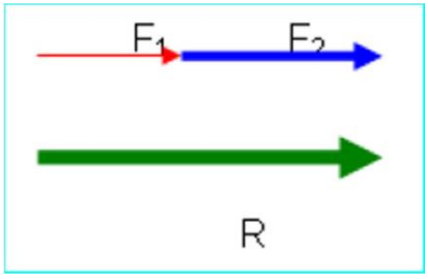


Imagen 8: Composición de vectores. Fuente: Elaboración propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejemplo 6: $F_1 = 3\ N$, $F_2 = 4\ N \rightarrow R = 3 + 4 = 7\ N$

2.- Fuerzas de la misma dirección y sentido contrario: La resultante es otra fuerza de la misma dirección, sentido el de la mayor, y de módulo, la diferencia de los módulos.

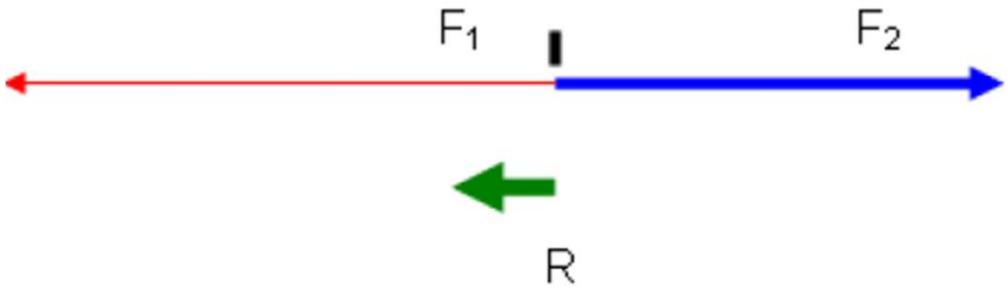


Imagen 9: Composición de vectores. Fuente: Elaboración propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejemplo 7: $F_1 = 3\ N$, $F_2 = 4\ N \rightarrow R = 4 - 3 = 1\ N$

3.- Fuerzas perpendiculares: Para calcular gráficamente la resultante, se emplea la regla del paralelogramo:

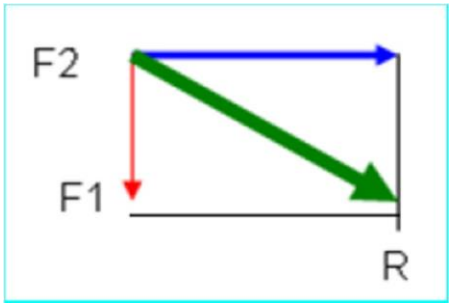


Imagen 10: Composición de vectores.
Fuente: Elaboración propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Para realizar el cálculo numérico se emplea el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 8: $F_1 = 3\ N$, $F_2 = 4\ N \rightarrow R = 5\ N$

Ejercicio 6

Dos fuerzas iguales de 1 N cada una se aplican sobre un objeto de modo que forman entre sí un ángulo de 90º. Calcula el módulo de la resultante y dibuja las tres fuerzas sobre unos ejes de coordenadas.

5.2) DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS

Descomponer una fuerza en otras varias es hallar un sistema de fuerzas que produzcan el mismo efecto que la fuerza dada.

Un caso muy interesante es la descomposición de una fuerza en dos componentes que sean perpendiculares entre sí. Para facilitar su descomposición, se realiza sobre los ejes de coordenadas y a las componentes obtenidas se las llama F_x y F_y y se calculan aplicando las razones trigonométricas:

$$sen\,\alpha = \frac{Fy}{F} \Rightarrow Fy = F.sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{F} \Rightarrow Fx = F.\cos\alpha$$

Imagen 11: Componentes de un vector. Fuente: Elaboración propia.

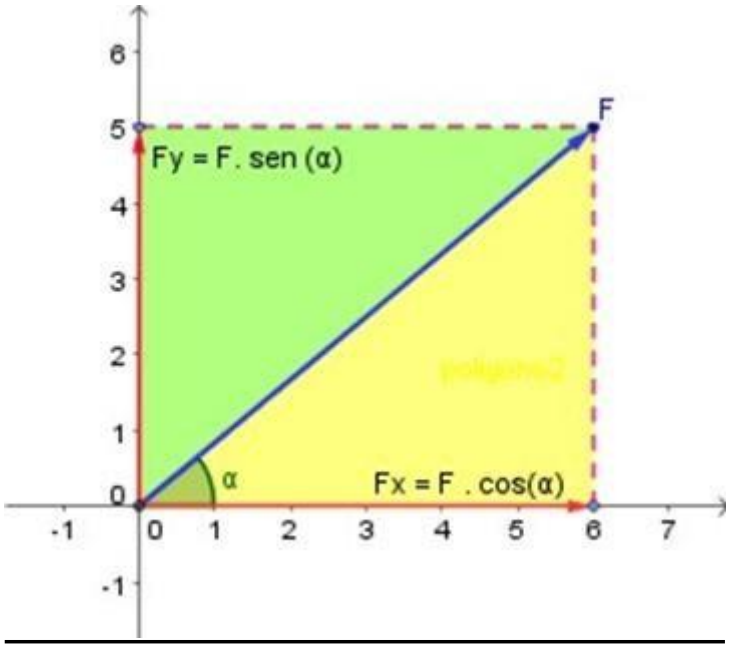
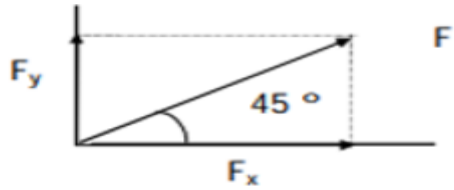


Imagen 12: Componentes de un vector. Fuente: Elaboración propia.

Ejercicio 7

Halla las componentes en el eje y y en el eje x de la F = 20N de la figura.



6) TIPOS DE FUERZAS

Las fuerzas pueden ser interiores o exteriores:

- Fuerzas interiores: Son aquellas que se ejercen entre partes de un mismo cuerpo o sistema. Ejemplo. La fuerza que hace que un muelle recupere su forma después de estirarlo.
- Fuerzas exteriores: Son aquellas que se ejercen entre cuerpos o sistemas diferentes. Ejemplo. La fuerza que una persona hace al empujar un libro sobre una mesa.

Las fuerzas que se producen entre los cuerpos pueden actuar a distancia o por contacto entre ellos:

- Fuerzas a distancia: Son la atracción gravitatoria de los cuerpos en el Universo, la atracción o repulsión entre cargas o entre imanes…
- Fuerzas por contacto: Es la fuerza que hace un caballo tirando de un carro, una cuerda sujetando un objeto, la fuerza con que el suelo responde a un cuerpo apoyado en él…

Además de todas las fuerzas comentadas, vamos a ver con más detalle las tres siguientes: **peso**, **normal** y **fuerza de rozamiento**.

6.1) PESO

El **peso** es la fuerza gravitatoria que actúa sobre un objeto. Está originado por la acción del campo gravitatorio que crea un planeta, en nuestro caso La Tierra, sobre todos los objetos que están en sus inmediaciones.

Por ser una fuerza, el peso se representa como un vector, definido por su módulo, dirección y sentido, aplicado en el centro de gravedad del cuerpo y dirigido aproximadamente hacia el centro de la Tierra (por eso siempre se dibuja vertical y hacia abajo). Por la misma razón, al ser una fuerza, se mide en el S.I. en **newton (N)**.

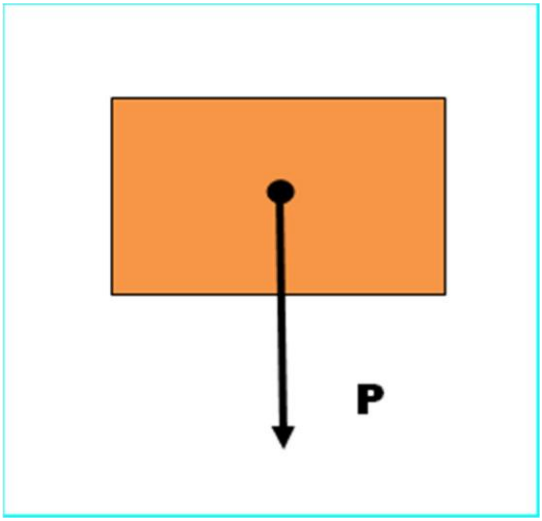


Imagen 13: Peso. Fuente: Elaboración propia.

Peso y masa son dos magnitudes físicas muy diferentes, aunque aún en estos momentos, en el habla cotidiana, el término "peso" se utiliza a menudo erróneamente como sinónimo de masa. La masa es una propiedad de la materia y es una magnitud escalar, es decir no necesita de vectores como el peso. Además, la masa de un objeto no varía con su posición, mientras que el peso depende de la gravedad del planeta en el que se encuentre, pudiendo incluso ser cero, cuando se aleja de ellos, lo que se conoce como ingravidez.

La relación entre peso y masa es la siguiente:

$$\mathbf{P = m \cdot g}$$

Donde **P** es el peso del cuerpo en N, **m** es la masa en kg del cuerpo y **g** es la **gravedad**, que en nuestro planeta vale 9,8 m/s^2. Aunque en ocasiones se redondea a 10m/s^2. Como ves, tiene unidades de aceleración, precisamente es la aceleración con la que los cuerpos caen debido a la atracción gravitatoria de La Tierra.

La gravedad en la Luna vale 1,7 m/s^2, por lo que los objetos allí pesan bastante menos, unas cinco veces menos.

Ejemplo 9: ¿Cuánto pesa una persona de 70 kg en la Tierra? ¿Y en la Luna?
Como 70 kg es la masa, el peso lo calcularemos con la formula: "P = m · g", pero sustituyendo en cada caso la gravedad de ese planeta:

En la Tierra: P = 70 · 9,8 = 686 N
En la Luna: P = 70 · 1,7 = 119 N

6.2) NORMAL

La **normal (N)** es la fuerza que ejercen las superficies sobre los cuerpos colocados sobre ellas, ya que si no estuviera esa superficie, el objeto se caería debido a la acción del peso. La dirección de la normal siempre es perpendicular a la superficie y su sentido hacia arriba.

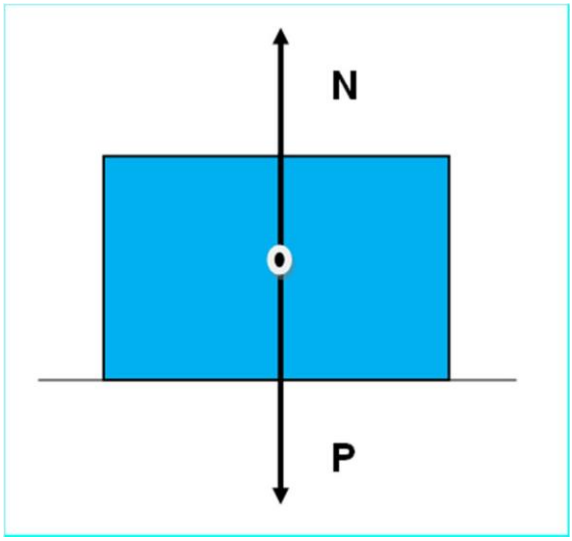


Imagen 14: Normal. Fuente: Elaboración propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Cuando un cuerpo está apoyado en una **superficie horizontal**, la normal tiene que compensar al peso, ya que el objeto ni sube ni baja, por lo tanto, se calculará de la siguiente forma:

$$\mathbf{N = P = m \cdot g}$$

Ejemplo 10: ¿Qué normal actúa sobre un libro de 2 kg apoyado en una mesa?
Aplicando la formula anterior: $N = P = m \cdot g = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6$ N

6.3) FUERZA DE ROZAMIENTO

La Fuerza de rozamiento ($\mathbf{F_r}$) es la fuerza que aparece en la superficie de contacto de dos cuerpos cuando se intenta deslizar uno sobre otro. La fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento, por tanto siempre la dibujaremos en sentido contrario al movimiento. La fuerza de rozamiento entre dos cuerpos se debe a que la superficie de contacto nunca es perfectamente lisa, sino que presenta rugosidades.

Si sobre un objeto, por ejemplo un coche, actúa una fuerza horizontal y hacia la derecha (F), por ejemplo la que hace el motor, se moverá con esa misma dirección y sentido y automáticamente aparecerá otra fuerza en sentido contrario, que es la fuerza de rozamiento (F_r). El esquema de estas fuerzas es el siguiente:

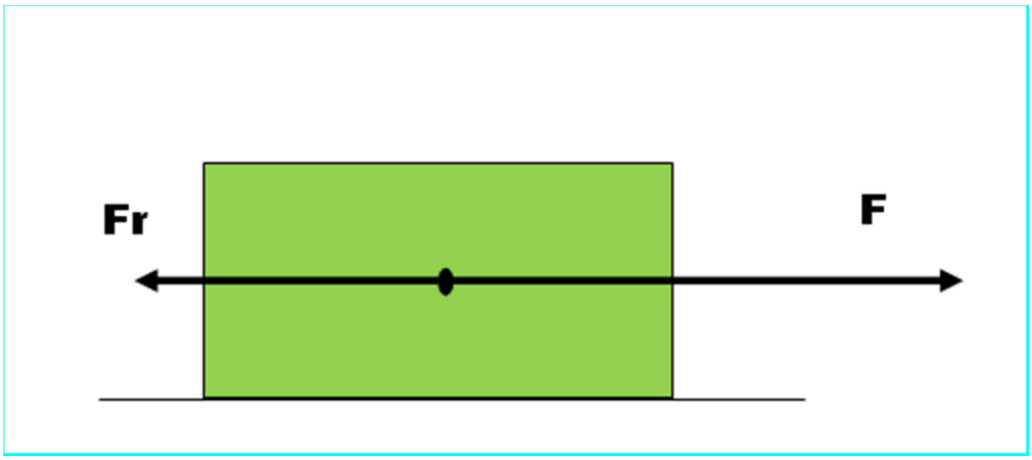


Imagen 15: Fuerza de rozamiento. Fuente: Elaboración propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

La fuerza de rozamiento se calcula con la ecuación:

$$Fr = \mu \cdot N$$

Donde "**μ**" es el **coeficiente de rozamiento,** que no tiene unidades y depende de las superficies en contacto, es mayor cuanto más rozan. Por ejemplo, es mucho mayor entre un neumático y el asfalto, que entre la cuchilla de un patín y el hielo.

Como ya hemos visto antes, "**N**" es la **normal.**

Ejemplo 11: Calcula la fuerza de rozamiento del ejemplo anterior, si el coeficiente de rozamiento vale 0,2
Aplicando la formula de la fuerza de rozamiento: $Fr = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 19,6 = 3,92$ N
Ojo: no confundas la "N" de la normal (que aparece en la formula) con la de los newton (que es una unidad y por lo tanto acompaña a la cantidad obtenida)

7) LEYES DE NEWTON

Isaac Newton (1643-1727), científico y matemático inglés, promulgó las denominadas "Leyes de la Dinámica", en las cuales expuso los principios sobre los que se basa el estudio de las fuerzas.

Imagen 16: Newton. Fuente: Wikipedia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Son tres leyes, en las que se fundamenta toda la Física clásica, que siguen siendo aplicables a la mayoría de los casos. Tan sólo a nivel microscópico o cuando nos acercamos a la velocidad de la luz, es necesario acudir a la Física moderna que inició Einstein.

7.1) PRINCIPIO DE INERCIA

También conocida como 1ª Ley de Newton, dice lo siguiente: **"Sí sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero, el cuerpo estará en reposo o se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme".**

Imagen 17: 1ª Ley de Newton. Fuente: Wikipedia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Las principales conclusiones de esta ley son:

1ª. Todo cuerpo en reposo seguirá en reposo mientras no se le aplique una fuerza.

2ª. Todo cuerpo libre (no sometido a interacciones) en movimiento, seguirá moviéndose con velocidad constante en trayectoria recta.

3ª. La tendencia de los cuerpos a conservar su estado de reposo o de movimiento se llama inercia. La inercia es la propiedad de un cuerpo que mide la resistencia del mismo a variar su estado de reposo o de movimiento. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, mayor será su inercia.

7.2) PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

También conocida como 2ª Ley de Newton, es la más importante de las tres y dice: **"Existe una relación constante entre las fuerzas aplicadas a un cuerpo y las aceleraciones que se producen en el mismo, siendo la constante de proporcionalidad la masa del cuerpo."**

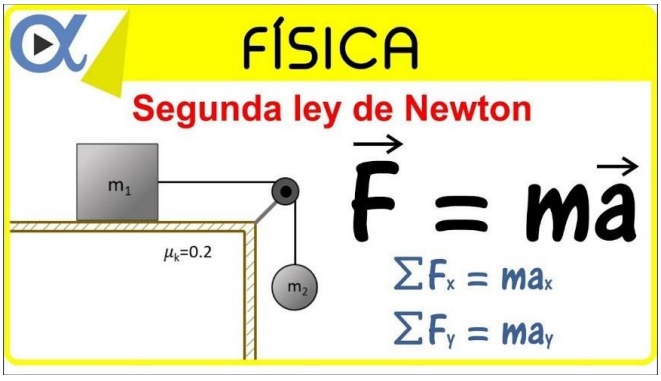


Imagen 18: 2ª Ley de Newton. Fuente: Wikipedia.

Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Matemáticamente se expresa: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Es decir, la fuerza resultante (suma vectorial de todas las fuerzas) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración.

Ejemplo 12: Si a un objeto de 10 kg se le aplica una fuerza de 50 N ¿Qué aceleración adquiere?
Como solo hay una fuerza, se aplica la segunda ley de Newton directamente y se despeja la aceleración: $F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{50}{10} = 5\ m/s^2$

Las consecuencias de esta ley son:

- La unidad de fuerza en el S. I. es el **Newton (N)**

  1 Newton = 1N = 1 kg · 1 m/s^2

  Se define el Newton como la fuerza que aplicada a 1 kg de masa le produce una aceleración de 1 m/s^2.

- Se justifica el concepto de peso de un cuerpo, como un tipo de fuerza. Como el peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae: **P = m · g ↔ F = m · a** vemos que ambas ecuaciones son muy similares, ya que a = g = 9,8 m/s^2

- Otra unidad de fuerza es el **kilopondio (kp),** que es la fuerza con que la Tierra atrae a 1 kg de masa:

  1 kp = 1 kg · 9,8 m/s^2 = 9,8 · 1 kg · 1 m/s^2 = 9,8 N; es decir: **1 kp = 9,8 N**

7.3) PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

Es la 3ª Ley de Newton: **"Si un cuerpo actúa sobre otro con una fuerza (acción), éste reacciona contra el primero con una fuerza igual y de sentido contrario (reacción)".**

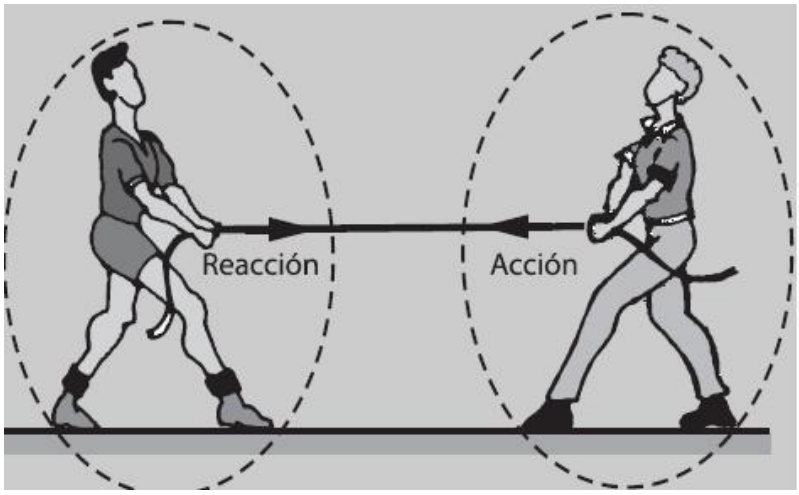


Imagen 19: 3ª Ley de Newton. Fuente: Wikipedia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Estas dos fuerzas no se anulan porque actúan sobre cuerpos diferentes.

Ejemplos:

- Cuando una persona intenta saltar a tierra desde una barca, la persona empuja la barca hacia atrás (acción) para que la barca le empuje hacia adelante (reacción).
- Al disparar una bala con un rifle, el arma ejerce una fuerza sobre el proyectil (acción), mientras que la bala ejerce otra sobre el rifle (reacción), que se conoce como retroceso y que es fácilmente apreciable en el hombro al disparar.

Ejercicio 8

Sobre un cuerpo que pesa 20 N y que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal se aplican dos fuerzas paralelas a la superficie de sentido contrario y de valores 8 N y 14 N Calcular:

a) La fuerza resultante
b) La acelaración.

Ejercicio 9

Sobre un cuerpo de 15 Kg de masa actúa una fuerza de 7N, ¿cuál es la aceleración producida?

Acudiendo a la fórmula $F = m \cdot a$ y despejando de ella la aceleración queda: $a = F/m$
por lo tanto aplicándolo a este problema tendremos: $a = 7/15 =$ **0,46 m/s²**

Ejercicio 10

Una fuerza de 120 N produce una aceleración de 2 m/s². Calcula la masa del cuerpo sobre el que ha actuado la fuerza.

Ejercicio 11

Sobre un cuerpo de 100 gramos de masa se ejerce una fuerza de 0,5 N. Calcula su aceleración.

Ejercicio 12

Sabiendo que sobre un cuerpo actúa una fuerza de 80 N y la fuerza de rozamiento es de 15 N. ¿Qué aceleración adquirirá el cuerpo de masa 10 kg?

Ejercicio 13

Partiendo del reposo, un conductor empuja su coche de 1000 kg durante 30 s, por un camino horizontal. Si la fuerza es de 400 N y la fuerza de rozamiento de 100 N. ¿Qué velocidad adquirirá al cabo de esos 30 s?

Ejercicio 14

Al aplicar a un cuerpo de 75 kg una fuerza, su velocidad pasa de 15 m/s a 45 m/s en 6 s. Calcula:

a) Intensidad de la fuerza aplicada.
b) Distancia recorrida en ese tiempo

8) LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La Ley de Gravitación Universal fue descubierta por Newton. Se puede enunciar de la siguiente forma:

"Toda partícula material del universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

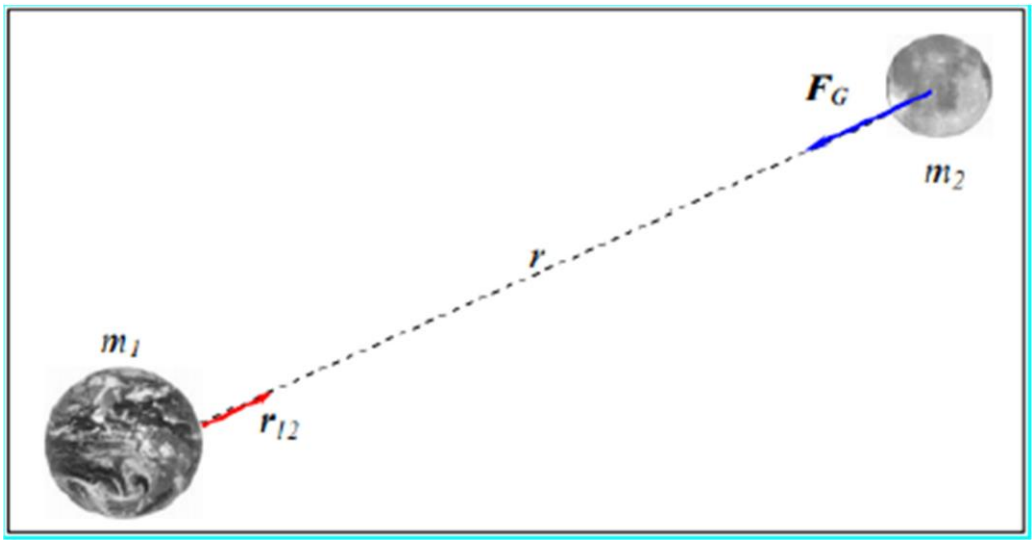


Imagen 20: Ley de Gravitación. Fuente: Elaboración propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Si las partículas que tienen masas m_1 y m_2 están separadas una distancia r medida desde sus centros, como se ve en la figura, entonces, de acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza de atracción gravitacional F_G ejercida por la masa m_1 sobre la masa m_2 es:

$$F_G = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Donde:

- G→ constante de gravitación universal G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2/kg^2$
- m_1 y m_2 → masas de los cuerpos que interaccionan
- r → distancia entre los cuerpos
- F_G → fuerza de atracción entre los cuerpos

Como hemos visto en apartados anteriores, sabemos que el peso de un cuerpo lo calculamos como P = m · g, y sabiendo que el peso en la Tierra de un cuerpo es la fuerza con que ésta atrae a dicho objeto, podríamos calcular el valor de la gravedad si sabemos el valor de la masa de la Tierra y su radio:

$$F = P = m_2 \cdot g = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Y despejando la gravedad (g) nos queda:

$$g = G\frac{m_1}{r^2}$$

Donde m_1 sería la masa de la Tierra y r su radio.

Esto mismo, lo podríamos extrapolar para cualquier planeta.

Ejemplo 13: Una masa de 800 kg y otra de 500 kg se encuentran separadas por 3 m, ¿Cuál es la fuerza de atracción entre dichas masas?

$$\mathbf{F} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 800 \cdot 500 / 3^2 = \mathbf{2{,}964 \cdot 10^{-6}\ N}$$

Podemos comprobar que cuando las masas no son muy grandes, las fuerzas de atracción entre ellas no son significativas, por lo que la Ley de Gravitación Universal solo tiene aplicación real cuando hablamos de interacciones entre planetas, o entre un planeta y otro objeto cualquiera.

9) PRESIÓN

En nuestra vida cotidiana hablamos muchas veces de presión: "voy a revisar la presión de los neumáticos", "ten cuidado con la olla a presión", "hay que cuidarse la presión arterial"...

Imagen 21: Presión. Fuente: Wikipedia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Pero, qué es realmente la presión. Pues la **presión** es una magnitud que mide el efecto deformador o capacidad de penetración de una fuerza y se define como la **fuerza ejercida por unidad de superficie**. Se expresa como:

$$\mathbf{p = F/S}$$

Ejemplo 14: ¿Qué presión ejerce una fuerza de 50 N sobre una superficie de 100 cm^2?
Tenemos que pasar los cm^2 a m^2: 100 cm^2 = 0,01 m^2
A continuación aplicamos la fórmula de la presión: P = F/S = 50/0,01 = 5000 Pa

La presión explica por qué un cuchillo afilado corta más, ya que al tener menos superficie de corte, ejerce más presión. También justifica el uso de los esquís, ya que al tener más superficie de contacto con la nieve, la presión es menor y el esquiador se hunde menos.

Su unidad de medida en el S.I. es el **N/m^2**, que se conoce como **Pascal** (**Pa**). Un pascal es la presión que ejerce una fuerza de un newton sobre una superficie de un metro cuadrado.

Como hemos comentado anteriormente la unidad de medida en el S.I. es el Pascal, sin embargo es común encontrar la presión expresadas en otras unidades.

- **kp/cm²** (Kilopondio por centímetro cuadrado, aunque vulgarmente se la conoce como kg/cm²): Muy utilizada en la Industria.
  1 kp/cm² = 98000 Pa.
- **atm** (atmósfera): Es la presión que ejerce la atmósfera a nivel del mar.
  1 atm = 101325 Pa. Se suele redondear a 101300 Pa.
- **bar:** Muy utilizada en meteorología. 1 bar = 100000 Pa.
  También se utiliza el mbar (milibar). 1 mbar = 100 Pa
- **mmHg** (milímetro de mercurio): 760 mmHg = 1 atm

Por lo tanto: 1 atm = 101300 Pa = 1,013 bar = 1013 mbar = 760 mmHg = 1,034 kp/cm².

Soluciones a los Ejercicios del tema

Ejercicio 1

Si un coche tarda 1,5 h en recorrer una distancia de 200 km, ¿cuál será su velocidad media?

Datos:

t = 1,5 h

e= 200 km

Unidades: como no nos dice nada, podemos dejarlo en km y h y la velocidad nos saldrá en km/h

Fórmula:

$v = e/t$

Cálculos:

v = 200 km/1,5 h= **133,3 km/h**

Ejercicio 2

Una persona recorre un tramo de 600 metros a la misma velocidad, invirtiendo un tiempo de 10 minutos, después se detiene durante cinco minutos y luego vuelve a caminar, también a velocidad constante, recorriendo 300 metros en cinco minutos. Calcula la velocidad en cada tramo del recorrido en m/s.

En primer lugar debemos calcular el tiempo en segundos, 10 minutos son 600 s.

Y 5 minutos son 300 s

Como v = e/t

- Primer tramo: v = 600/600 = **1m/s**
- Segundo tramo: **v = 0**, ya que está descansando.
- Tercer tramo: v = 300/300 = **1 m/s**

Ejercicio 3

Si un coche cambia su velocidad de 72 km/h a 90 km/h de manera progresiva en 10 s, ¿cuál es su aceleración?

Lo primero que tenemos que hacer es pasar los km/h a m/s y lo podemos hacer utilizando los factores de conversion:

$V_0 = 72 \frac{km}{h} \cdot \left(\frac{1000\ m}{1\ km}\right) \cdot \left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 20 \frac{m}{s}$

$V = 90 \frac{km}{h} \cdot \left(\frac{1000\ m}{1\ km}\right) \cdot \left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 25 \frac{m}{s}$

Por ultimo despejamos la aceleración y la calculamos:

$a = (v - v_o)/t$ = (25 – 20)/10 = **0,5 m/s^2**

Ejercicio 4

Un tren que en un instante dado tenía una velocidad de 15 m/s adquirió una aceleración de –3 m/s² durante 2 s. Calcula su velocidad final y la distancia que recorrió al cabo de esos 2 s.

Datos:
V_0 = 15 m/s
a = -3 m/s²
t = 2 s

Fórmulas: $v = v_0 + a \cdot t$ $\quad e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Cálculos: $v = 15 + -3 \cdot 2 =$ **9 m/s**

$e = 15 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-3) \cdot 2^2 = 30 - 6 =$ **24 m**

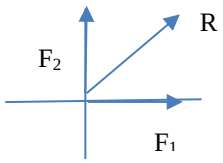
Ejercicio 5

En unas rebajas, dos personas intentan arrebatarse mutuamente un jersey que ambas sujetan, ¿Cuál de las dos logrará su objetivo?

a) La que tenga más edad
b) La que tenga peor carácter
X c) La que tire con más fuerza

Ejercicio 6

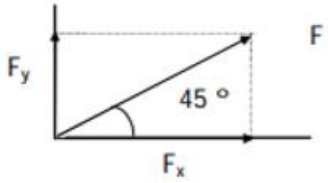
Dos fuerzas iguales de 1 N cada una se aplican sobre un objeto de modo que forman entre sí un ángulo de 90º. Calcula el módulo de la resultante y dibuja las tres fuerzas sobre unos ejes de coordenadas.



$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} =$ **1,41 N**

Ejercicio 7

Halla las componentes en el eje y y en el eje x de la F = 20N de la figura.



Solución:

$F_x = F. \cos \alpha = 20. \cos 45 = 20. 0,7 =$ **14 N**

$F_y = F. \text{ sen } \alpha = 20. \text{ sen } 45 = 20. 0,7 =$ **14 N**

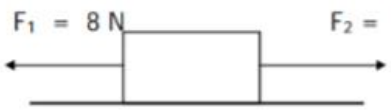
Ejercicio 8

Sobre un cuerpo que pesa 20 N y que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal se aplican dos fuerzas paralelas a la superficie de sentido contrario y de valores 8 N y 14 N Calcular:

c) La fuerza resultante
d) La acelaración.

Solución:

Aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica:



$F = m\ a$

La fuerza resultante vale: $F = 14 - 8 = 6$ N

$P = m.g$; $20 = m\ 10$; $m = 20 / 10 = 2$ kg.

$6 = 2\ a$; $a = 6 / 2 = 3$ m/s^2.

Ejercicio 9

Sobre un cuerpo de 15 Kg de masa actúa una fuerza de 7N, ¿cuál es la aceleración producida?

Acudiendo a la fórmula F = m·a y despejando de ella la aceleración queda: a = F/m
por lo tanto aplicándolo a este problema tendremos: a = 7/15 = **0,46 m/s^2**

Ejercicio 10

Una fuerza de 120 N produce una aceleración de 2 m/s^2. Calcula la masa del cuerpo sobre el que ha actuado la fuerza.

Volviendo a aplicar la formula F = m · a
y despejando en este caso de la masa: m = F/a = 120/2 = **60 kg**

Ejercicio 11

Sobre un cuerpo de 100 gramos de masa se ejerce una fuerza de 0,5 N. Calcula su aceleración.

Puesto que tenemos que trabajar con unidades del Sistema Internacional, antes de iniciar ninguna operación deberemos transformar los gramos en kilogramos, es decir.
100 gramos = 0.1 Kg
Después aplicando la 2ª Ley de Newton, y despejando la aceleración

a = F/m = 0,5/0,1 = **5 *m/s^2***

Ejercicio 12

Sabiendo que sobre un cuerpo actúa una fuerza de 80 N y la fuerza de rozamiento es de 15 N. ¿Qué aceleración adquirirá el cuerpo de masa 10 kg?

Datos:
F = 80 N
F_r = 15 N
m = 10 kg
Fórmulas: $F - F_r = m \cdot a$
Cálculos: a = (80 – 15)/10 = **6,5 m/s^2**

Ejercicio 13

Partiendo del reposo, un conductor empuja su coche de 1000 kg durante 30 s, por un camino horizontal. Si la fuerza es de 400 N y la fuerza de rozamiento de 100 N. ¿Qué velocidad adquirirá al cabo de esos 30 s?

Datos:
F = 400 N
F_r = 100 N
m = 1000 kg
t = 30 s
Fórmulas: $F - F_r = m \cdot a$ y $v = v_0 + a \cdot t$

Cálculos: $a = (400 – 100)/1000 = 0{,}3\ m/s^2$
$V = 0 + 0{,}3 \cdot 3 =$ **9 m/s**

Ejercicio 14

Al aplicar a un cuerpo de 75 kg una fuerza, su velocidad pasa de 15 m/s a 45 m/s en 6 s. Calcula:

a) Intensidad de la fuerza aplicada.

b) Distancia recorrida en ese tiempo

Datos:
$v_0 = 15$ m/s
$v = 45$ N
$m = 75$ kg
$t = 6$ s

Fórmulas: $v = v_0 + a \cdot t$, $F = m \cdot a$ y $e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Cálculos: $a = (45 – 15)/6 =$ **5 m/s²**

$F = 75 \cdot 5 = 375$ N
$e = 15 \cdot 6 + 2{,}5 \cdot 36 = 90 + 90 =$ **180 m**

TAREAS ACT 4. BLOQUE 12. TEMA 7.

1. Completa la siguiente tabla:

Magnitudes	Unidades
Espacio (e)	
	segundo (s)
Velocidad (v)	
	m/s^2

2. Un móvil recorre 100 km en 2 h, calcular:
a) Su velocidad (m/s).
b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 3 h con la misma velocidad?

3. Un camión se mueve a velocidad constante de 50 m/s por una autopista recta.
a) ¿qué distancia recorre en 2 horas?
b) ¿qué distancia recorre por segundo?
c) ¿cuánto tardará en recorrer 10km?

4. Calcula la distancia que recorre un corredor que va a una velocidad de 5 m/s durante un cuarto de hora.

5. Un automóvil se desplaza con una rapidez de 30 m por segundo, con movimiento rectilíneo uniforme. Calcule la distancia que recorrerá en 12 segundos.

6. El record del mundo de 100 metros lisos está de 9 segundos. ¿Cuál es la velocidad media del atleta?

7.Dibujar la gráfica del espacio recorrido en función del tiempo y la gráfica de la velocidad en función del tiempo del movimiento rectilíneo uniforme de una aeronave que vuela a 1200 m/s.

8. Un camión circula por una carretera a 20m/s . En 5 s, su velocidad pasa a ser de 25 m/s ¿cuál ha sido su aceleración?

9. Un cuerpo se mueve, partiendo del reposo, con una aceleración constante de 8 m/s^2. Calcular:
a) la velocidad que tiene al cabo de 5 s
b) la distancia recorrida, desde el reposo, en los primeros 5 s.

10. Un coche avanza a 100 m/s y en un momento dado el conductor ve un obstáculo y frena hasta detener el coche en 4 segundos, justo frente a dicho obstáculo. ¿Qué aceleración ha aplicado? ¿Qué distancia ha recorrido el coche durante la frenada?

11. Un tren de alta velocidad en reposo comienza su trayecto en línea recta con una aceleración constante de a=0.5m/s2. Calcular la velocidad (en kilómetros por hora) que alcanza el tren a los 3 minutos.

12. La bala de un rifle, cuyo cañón mide 1,4 m, sale con una velocidad de 1.400 m/s. Calcular:
a) ¿Qué aceleración experimenta la bala?
a) ¿Con qué velocidad toca pista?

13. Un tiovivo gira a 30 revoluciones por minuto. Calcula la velocidad angular y la velocidad lineal de un caballito que esté a 1,5 metros del centro y de otro que esté a 2 metros.

14. Siendo 30 cm el radio de las ruedas de un coche y 900 las revoluciones que dan por minuto, calcúlese:
a) la velocidad angular de las mismas;
b) la velocidad del coche en m/s.

15. Representa las fuerzas que actúan mediante vectores y halla la fuerza resultante en cada caso:
a) Dos fuerzas de la misma dirección y sentido contrario de 7 N y 15 N.
b) Dos fuerzas concurrentes perpendiculares de 7 N y 10 N.

16. Dos fuerzas de 8 y 6 N se aplican sobre un cuerpo.
Calcula:
a) La fuerza resultante si actúan en la misma dirección y sentido.
b) La fuerza resultante si actúan en la misma dirección y sentidos opuestos.
c) La fuerza resultante en el caso de que ambas fuerzas formen un ángulo recto

17. Dos amigos, uno más corpulento y otro más delgado, empujan un sofá en la misma dirección y sentido. El primero de ellos ejerce una fuerza de 10 N y el segundo 8 N. ¿Cuál es la fuerza resultante con la que empujan el sofá?

18. Calcula el peso de una persona de 50 kg masa.

19. ¿Qué fuerza normal ejerce la superficie sobre una caja de 30 kg que está apoyada sobre el suelo? ¿Con qué dirección?

20. Calcula la fuerza de rozamiento que aparece sobre un cuerpo apoyado sobre una

superficie horizontal, de masa 5 kg y donde el coeficiente de rozamiento entre las dos superficies es 0,3.

21. Una fuerza le proporciona a la masa de 2,5 Kg. una aceleración de 1,2 m/s2. Calcular la magnitud de dicha fuerza en Newton

22. ¿Qué aceleración adquirirá un cuerpo de 0,5 Kg. cuando sobre él actúa una fuerza de 20000 N?

23. Dibuja las fuerzas que actúan sobre un libro apoyado encima de una mesa. ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

24. Una masa de 800 kg y otra de 500 kg se encuentran separadas por 3m, ¿Cuál es la fuerza de atracción que experimenta la masa?

25. Calcular la magnitud de la fuerza gravitacional con la que se atraen dos personas, si una de ellas tiene una masa de 110 kg y otra de 86 kg, si la distancia que hay entre ambos es de 1.3 metros

26. ¿Cuál es la presión ejercida por una fuerza de 120 N que actúa sobre una superficie de 0.040 metros cuadrados?

27. Una persona de 84 kg se para sobre la losa de una casa que tiene por superficie 2 metros cuadrados. ¿Cuál será la presión que esta persona ejerce sobre la losa?

AUTOEVALUACIÓN Módulo 4. Bloque 12. Tema 7.

1. Decimos que un cuerpo está en movimiento cuando:
   a) Permanece en la misma posición con respecto a un punto fijo.
   b) Su posición varía con respecto a un punto fijo.
   c) Su posición varía respecto a varios puntos móviles.

2. ¿Qué son las magnitudes fundamentales?
   a) Aquellas que se definen a partir de otras magnitudes.
   b) La velocidad y la aceleración son ejemplos de ellas.
   c) Son aquellas magnitudes que se definen por sí mismas.

3. Las unidades en el S.I. para medir la distancia y el tiempo son:
   a) El metro y el segundo, respectivamente.
   b) El kilómetro y el segundo, respectivamente.
   c) El metro y la hora, respectivamente.

4. Hay dos tipos de movimientos según su trayectoria. Son:
   a) Elíptico y lineal.
   b) Lineal y curvilíneo.
   c) Aleatorio y lineal.

5. En el MRU la velocidad se calcula con la siguiente fórmula:
   a) $v = e \cdot t$
   b) $v = e/t$
   c) $v = e+t$

6. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿a qué distancia de nosotros estaría una persona si nos lleva 5 s para escuchar sus gritos?
   a) 1700 m
   b) 340 m
   c) 68 m.

7. En el MRU, en una gráfica e-t
   a) Se representa el espacio en el eje de abcisas y el tiempo en el eje de ordenadas.
   b) Se representa el espacio en el eje de ordenadas y la velocidad en el eje de abcisas.
   c) Se representa el espacio en el eje de ordenadas y el tiempo en el eje de abcisas.

8. En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la aceleración es:
   a) Positiva.
   b) Constante.
   c) Cero.

9. Una locomotora necesita 10 s para alcanzar su velocidad normal que es 25 m/s. Suponiendo que su movimiento es uniformemente acelerado. ¿Qué aceleración se le ha comunicado y qué espacio ha recorrido antes de alcanzar la velocidad regular?
   a) 2,5 m/s^2, 125 m.
   b) 0,25 m/s^2, 250 m.
   c) 3 m/s^2, 100 m.

10. Un tren que va a 30 m/s debe reducir su velocidad a 20 m/s al pasar por un puente. Si realiza la operación en 5 s, ¿qué espacio ha recorrido en ese tiempo?
    a) 75 m
    b) 250 m
    c) 125 m

11. En un MCU, la velocidad angular es:
    a) La distancia recorrida por un punto de la periferia entre el radio descrito.
    b) Es el ángulo barrido ($\Delta\varphi$) en un intervalo de tiempo (Δt).
    c) Es el ángulo barrido ($\Delta\varphi$) multiplicado por el intervalo de tiempo empleado (Δt).

12. Una rueda de 50 cm de radio gira a 180 r.p.m. ¿Cuál es su velocidad lineal en el borde?
    a) 6 rad/s
    b) 9000 m/s
    c) 9,42 m/s.

13. Un CD, que tiene un radio de 6 cm, gira a una velocidad de 2500 r.p.m. Calcula la velocidad angular en rad/s.
    a) 83,3π rad/s
    b) 15000 rad/s
    c) 600 rad/s.

14. Para definir un vector, necesitamos saber:
    a) Módulo, dirección, sentido, punto de aplicación.
    b) Dirección y módulo del mismo.
    c) Punto de aplicación y módulo del mismo.

15. La resultante de dos fuerzas que actúan en la misma dirección y sentido contrario es:
    a) Fuerza de la misma dirección y sentido y cuyo módulo es la suma de los módulos.
    b) Se puede calcular gráficamente usando la regla del paralelogramo.
    c) Fuerza de la misma dirección, sentido el de la mayor y cuyo módulo es la diferencia de los módulos.

16. Dos fuerzas de 6 N y 9 N actúan en la misma dirección y sentido sobre un mismo punto. ¿Cuál es el módulo de la fuerza resultante?
    a) 3 N
    b) 54 N
    c) 3 N

17. La relación entre el peso y la masa de un cuerpo es:
    a) $p = m \cdot g$
    b) $p = m/g$
    c) $p = m$

18. La dirección de la fuerza normal es siempre:
    a) Paralela a la superficie.
    b) Perpendicular a la superficie.
    c) Oblicua a la superficie.

19. Una lámpara de 0,2 kg está apoyada sobre una mesa de 10 kg. La fuerza que hace la mesa para equilibrar el peso de la lámpara es:
    a) 10 N
    b) 2 N
    c) 12 N
20. Ante un frenazo brusco, los ocupantes de un automóvil, en virtud del principio de inercia:
    a) Se desplazan hacia delante.
    b) Se desplazan hacia atrás.
    c) Permanecerán inmóviles.

21. Las fuerzas de acción y reacción no se anulan nunca porque:
    a) Actúan en direcciones opuestas.
    b) Tienen distintos módulos.
    c) Están aplicadas a cuerpos distintos.

22. La presión es:
    a) La fuerza ejercida por unidad de tiempo.
    b) La fuerza ejercida por unidad de masa.
    c) La fuerza ejercida por unidad de superficie.

AUTOEVALUACIÓN Módulo 4. Bloque 12. Tema 7. Soluciones.

1. Decimos que un cuerpo está en movimiento cuando:
   a) Permanece en la misma posición con respecto a un punto fijo.
   b) Su posición varía con respecto a un punto fijo.
   c) Su posición varía respecto a varios puntos móviles.

2. ¿Qué son las magnitudes fundamentales?
   a) Aquellas que se definen a partir de otras magnitudes.
   b) La velocidad y la aceleración son ejemplos de ellas.
   c) Son aquellas magnitudes que se definen por sí mismas.

3. Las unidades en el S.I. para medir la distancia y el tiempo son:
   a) El metro y el segundo, respectivamente.
   b) El kilómetro y el segundo, respectivamente.
   c) El metro y la hora, respectivamente.

4. Hay dos tipos de movimientos según su trayectoria. Son:
   a) Elíptico y lineal.
   b) Lineal y curvilíneo.
   c) Aleatorio y lineal.

5. En el MRU la velocidad se calcula con la siguiente fórmula:
   a) $v = e \cdot t$
   b) $v = e/t$
   c) $v = e+t$

6. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿a qué distancia de nosotros estaría una persona si nos lleva 5 s para escuchar sus gritos?
   a) 1700 m
   b) 340 m
   c) 68 m.

7. En el MRU, en una gráfica e-t
   a) Se representa el espacio en el eje de abcisas y el tiempo en el eje de ordenadas.
   b) Se representa el espacio en el eje de ordenadas y la velocidad en el eje de abcisas.
   c) **Se representa el espacio en el eje de ordenadas y el tiempo en el eje de abcisas.**

8. En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la aceleración es:
   a) Positiva.
   b) Constante.
   c) Cero.

9. Una locomotora necesita 10 s para alcanzar su velocidad normal que es 25 m/s. Suponiendo que su movimiento es uniformemente acelerado. ¿Qué aceleración se

le ha comunicado y qué espacio ha recorrido antes de alcanzar la velocidad regular?

a) 2,5 m/s^2, 125 m.
b) 0,25 m/s^2, 250 m.
c) 3 m/s^2, 100 m.

10. Un tren que va a 30 m/s debe reducir su velocidad a 20 m/s al pasar por un puente. Si realiza la operación en 5 s, ¿qué espacio ha recorrido en ese tiempo?
    a) 75 m
    b) 250 m
    c) 125 m

11. En un MCU, la velocidad angular es:
    d) La distancia recorrida por un punto de la periferia entre el radio descrito.
    e) Es el ángulo barrido (Δφ) en un intervalo de tiempo (Δt).
    f) Es el ángulo barrido (Δφ) multiplicado por el intervalo de tiempo empleado (Δt).

12. Una rueda de 50 cm de radio gira a 180 r.p.m. ¿Cuál es su velocidad lineal en el borde?
    a) 6 rad/s
    b) 9000 m/s
    c) 9,42 m/s.

13. Un CD, que tiene un radio de 6 cm, gira a una velocidad de 2500 r.p.m. Calcula la velocidad angular en rad/s.
    a) **83,3π rad/s**
    b) 15000 rad/s
    c) 600 rad/s.

14. Para definir un vector, necesitamos saber:
    a) Módulo, dirección, sentido, punto de aplicación.
    b) Dirección y módulo del mismo.
    c) Punto de aplicación y módulo del mismo.

15. La resultante de dos fuerzas que actúan en la misma dirección y sentido contrario es:
    a) Fuerza de la misma dirección y sentido y cuyo módulo es la suma de los módulos.
    b) Se puede calcular gráficamente usando la regla del paralelogramo.
    c) Fuerza de la misma dirección, sentido el de la mayor y cuyo módulo es la diferencia de los módulos.

16. Dos fuerzas de 6 N y 9 N actúan en la misma dirección y sentido sobre un mismo punto. ¿Cuál es el módulo de la fuerza resultante?
    a) 3 N
    b) 54 N

c) 3 N

17. La relación entre el peso y la masa de un cuerpo es:
    a) p = m·g
    b) p = m/g
    c) p = m

18. La dirección de la fuerza normal es siempre:
    a) Paralela a la superficie.
    b) Perpendicular a la superficie.
    c) Oblicua a la superficie.

19. Una lámpara de 0,2 kg está apoyada sobre una mesa de 10 kg. La fuerza que hace la mesa para equilibrar el peso de la lámpara es:
    a) 10 N
    b) 2 N
    c) 12 N

20. Ante un frenazo brusco, los ocupantes de un automóvil, en virtud del principio de inercia:
    a) Se desplazan hacia delante.
    b) Se desplazan hacia atrás.
    c) Permanecerán inmóviles.

21. Las fuerzas de acción y reacción no se anulan nunca porque:
    a) Actúan en direcciones opuestas.
    b) Tienen distintos módulos.
    c) Están aplicadas a cuerpos distintos.

22. La presión es:
    a) La fuerza ejercida por unidad de tiempo.
    b) La fuerza ejercida por unidad de masa.
    c) La fuerza ejercida por unidad de superficie.

Bloque 12. Tema 8.

Trabajo. Potencia. Energía y Calor

ÍNDICE

1) TRABAJO.

2) POTENCIA

3) ENERGÍA.
   3.1. Energía potencial gravitatoria. (Ep).
   3.2. Energía Cinética (Ec).
   3.3. Energía Mecánica (Em).

4) PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

5) TEMPERATURA Y CALOR.

1) TRABAJO

En el lenguaje cotidiano se confunde el concepto de esfuerzo con el de trabajo. En Física, cuando al ejercer una fuerza sobre un cuerpo, ésta produce un cambio en el cuerpo, decimos que dicha fuerza ha realizado un trabajo. Si no se produce cambio, no hay trabajo. Por ejemplo, una persona que está empujando un cuerpo pesado, si no lo mueve, no está realizando trabajo. Realiza un gran esfuerzo, pero trabajo no.

Son distintos los conceptos de esfuerzo y trabajo. Hacemos esfuerzo cuando aplicamos una fuerza y realizamos un trabajo cuando la fuerza que ejercemos produce una transformación.

El trabajo se representa por la letra "W" debido a que en inglés "work" significa trabajo y se define del siguiente modo:

El **trabajo (W)** que realiza una fuerza constante F que actúa sobre un cuerpo es igual al producto del módulo de la fuerza F (valor numérico de la fuerza) por el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza (Δx) por el coseno del ángulo α formado entre las direcciones de la fuerza y el desplazamiento.

$$W = F. \Delta x. \cos \alpha$$

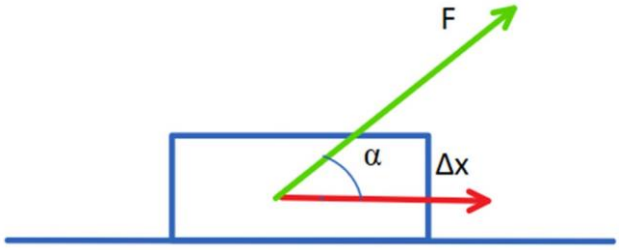


Imagen 1: Trabajo realizado por una fuerza F.
Fuente: Elaboración propia

La unidad de trabajo en el Sistema Internacional (S.I.) es el Julio (J). Un julio es el trabajo que realiza una fuerza de 1N al desplazar un cuerpo 1m en la misma dirección de su desplazamiento.

1 J = 1N. 1m

Según sea el valor del ángulo α (ángulo formado por las direcciones de la fuerza y el desplazamiento) el trabajo tendrá los siguientes valores:

a) Cuando la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido, α = 0º y el cos α = cos 0º = 1.

W = F. Δx. cos α = F. Δx. cos 0º = F.Δx.1 = **F.** Δ**x**. Es decir, en este caso el trabajo es máximo (**W máximo)**.

α = 0º → cos 0º = 1 → W máximo

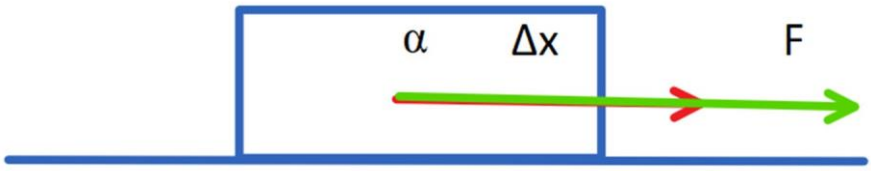


Imagen 2: α = 0º Fuente:
Elaboración propia

b) Cuando la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo comprendido entre 0º y 90º, el cos α es mayor que 0 y el W es positivo.

0º < α < 90º → cos α > 0 → w > 0

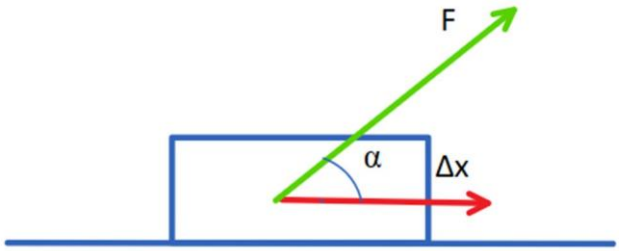


Imagen 3: 0º < α < 90º
Fuente: Elaboración propia

c) Cuando la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares, α = 90º y el cos α = cos 90º = 0. por lo tanto, el trabajo es cero.

W = F. ∆x. cos α = F. ∆x. cos 90º = F.∆x.0 = **0**. Es decir, en este caso el trabajo es nulo.

Por lo tanto, las fuerzas perpendiculares nunca producen trabajo mecánico.

α = 90º → cos 90º = 0 → W = 0.

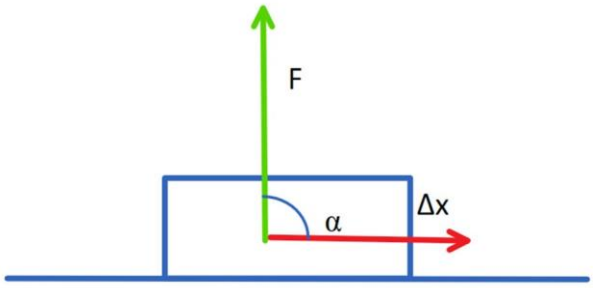


Imagen 4: α = 90º Fuente;
Elaboración propia

Un ejemplo es la fuerza normal (N) que nunca realiza trabajo porque siempre es perpendicular a la superficie y, por lo tanto, al desplazamiento de los cuerpos sobre los que actúan.

El trabajo será nulo cuando no haya desplazamiento (∆x = 0) o cuando cos α =0, es decir cuando α = 90º.

d) Cuando la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo comprendido entre 90º y 180º, el cos α es menor que 0 y el W es negativo.

90º < α < 180º → cos α < 0 → w < 0

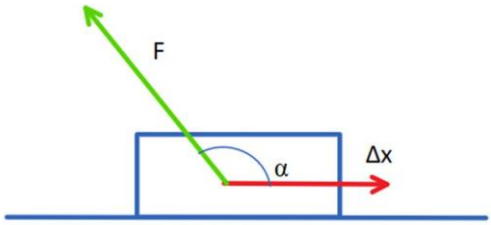


Imagen 5: 90º < α < 180º
Fuente: Elaboración propia

e) Cuando la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido contrario, α = 180º y el cos α = cos 180º = -1.

W = F. ∆x. cos α = F. ∆x. cos 180º = F.∆x.(-1) = **- F.** ∆**x**.

Un ejemplo es la fuerza de rozamiento que siempre lleva la dirección del movimiento pero el sentido contrario.

α = 180º → cos 0º = - 1 → W < 0

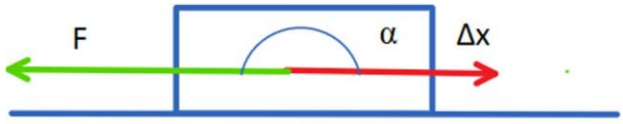


Imagen 6: α = 180º Fuente: Elaboración propia

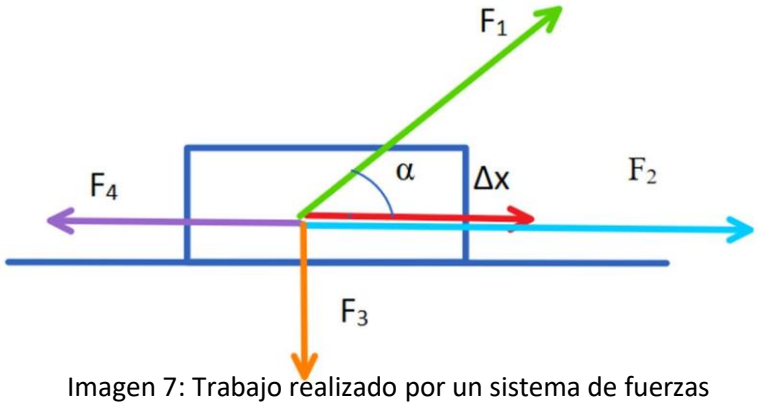
Ejercicio 1

¿En cuál de las siguientes situaciones se realiza trabajo?

	a) Empujamos con fuerza la pared de la habitación
	b) Levantamos un paquete del suelo
	c) Empujamos el coche hasta el garaje
	d) Estudiamos

Ejemplo 1:

Calcular el trabajo realizado por cada fuerza si el cuerpo sobre el que actúan se desplaza 50 m.



F_1 = 10 N
F_2 = 10 N
F_3 = 19,6 N
F_4 = 7 N
α = 60º
m = 2 kg

Imagen 7: Trabajo realizado por un sistema de fuerzas Fuente: Elaboración propia

El trabajo realizado por cada fuerza es:

$W_1 = F.\Delta x.\cos \alpha = 10\ N\ .\ 50m\ .\ \cos 60º = 10\ N\ .\ 50m\ .\ 0{,}5 = 250\ J.$

$W_2 = F.\Delta x.\cos \alpha = 10\ N\ .\ 50m\ .\ \cos 0º = 10\ N\ .\ 50m\ .\ 1 = 500\ J.$

$W_3 = F.\Delta x.\cos \alpha = 19{,}6\ N\ .\ 50m\ .\ \cos 90º = 19{,}6\ N\ .\ 50m\ .\ 0 = 0\ J.$

$W_4 = F.\Delta x.\cos \alpha = 7\ N\ .\ 50m\ .\ \cos 180º = 10\ N\ .\ 50m\ .\ (-1) = -\ 350\ J.$

Para calcular el trabajo total (W_t) basta con sumar los trabajos realizados por cada fuerza:

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 250\ J + 500\ J + 0\ J - 350\ J = 400\ J.$$

Ejercicio 2

Para arrastrar un objeto atamos una cuerda al mismo y tiramos del otro extremo. ¿Depende el esfuerzo a realizar de la longitud de la cuerda?

Imagen 8: Cuerpo arrastrado por cuerdas de distinta longitud
Fuente: Elaboración propia

Ejercicio 3

Una grúa eleva un coche de 800 Kg hasta una altura de 20 metros. ¿Qué trabajo realiza?

g = 9,8 m/s^2 = 9,8 N/kg.

Ejercicio 4

Sobre un cuerpo de 2 Kg., inicialmente en reposo, actúan las siguientes fuerzas:

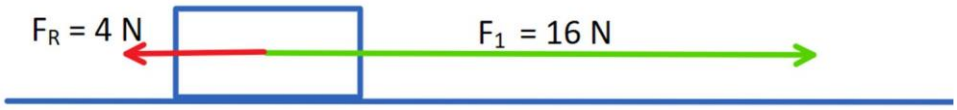


Imagen 9: Fuerzas que actúan sobre un cuerpo
Fuente: Elaboración propia

Calcula el trabajo que realiza cada fuerza en 3 s.

2) POTENCIA

Imagínate que dos personas suben tres cajas de 10 Kg cada una, a una mesa de 1 m de altura. Una de ellas lo hace subiendo las tres cajas a la vez, y la otra, de una en una. ¿Cuál de las dos realiza más trabajo?

Persona (1) : $W_{Total} = m * g * h = 30\ kg\ .\ 9{,}8\ N/kg\ .\ 1\ m = 294\ J$

Persona (2) : $W_{caja} = m * g * h = 10\ kg\ .\ 9{,}8\ N/kg\ .\ 1\ m = 98\ J$

$$W_T = 3\ W_{caja} = 3 * 98\ J = 294\ J$$

Como vemos, el trabajo realizado por cada persona es el mismo independientemente del tiempo empleado. La persona que subió las tres cajas a la vez, ha empleado menos tiempo que la que las subió de una en una.

La magnitud física que relaciona el trabajo realizado con el tiempo empleado para ello, se denomina **potencia.** Es el trabajo que se realiza por unidad de tiempo. Se representa por le letra " P". Su fórmula es:

P = W / t P = Potencia

W = Trabajo realizado

t = Tiempo empleado

La unidad de potencia en el sistema internacional es el vatio (W) . Se define como la potencia necesaria para realizar un trabajo de 1 J en 1 s.

$$1\ W = 1\ J / 1\ s$$

Otras unidades de potencia muy utilizadas son:

- El kilovatio (kW) → **1 kW = 1000 W**
- El caballo de vapor (CV) → **1 CV = 735 W**

El kilovatio-hora (kW.h) es una unidad de energía (no de potencia). Si despejamos el W de la expresión P = W / t, queda que

$$W = P \cdot t$$

Si la potencia la expresamos en kW y el tiempo en h, el trabajo realizado se expresará en kW.h.

W= P . t = 1 kW . 1 h = **1 kW.h**

Como 1 kW = 1000 W y 1 h = 3600 s

1 kW.h = 1000 w . 3600 s = 3600000 w.s = 3600000J → **1 kW.h = 3600000 J**

Ejemplo 2

Dos grúas suben un cuerpo de 100 Kg. a una altura de 20 m. La primera tarda 40 s y la segunda 50 s. Calcula la potencia que desarrolla cada grúa.

P = W / t = m . g . h / t

P_1 = m . g . h / t = (100 . 9,8 . 20) J / 40 s = 490 w.

P_2 = m . g . h / t = (100 . 9,8 . 20) J / 50 s = 392 w.

Como se puede comprobar, el trabajo realizado por cada grúa es el mismo pero como emplean distintos tiempos para ello, la grúa que lo realiza en menos tiempo tiene más potencia.

Ejemplo 3

Sobre un cuerpo de 2 kg, inicialmente en reposo, actúan horizontalmente las siguientes fuerzas:

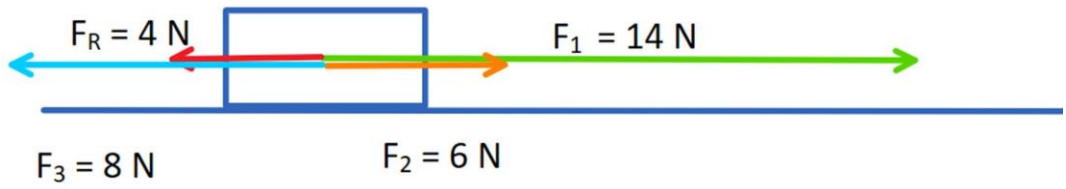


Imagen 10: Fuerzas que actúan sobre un cuerpo.
Fuente: Elaboración propia.

Calcula la potencia que desarrolla cada fuerza en 10 s.

m = 2 kg

Inicialmente en reposo → v_0 = 0 m/s

$F_1 = 14$ N

$F_2 = 6$ N

$F_3 = 8$ N

$F_r = 4$ N

t = 10 s

P_{F1} = ?

P_{F2} = ?

P_{F3} = ?

P_{Fr} = ?

Para poder calcular el W realizado por cada fuerza: $W = F. \Delta \mathbf{x}. \cos \alpha$

Tenemos que averiguar el desplazamiento del cuerpo (Δx).

Como sobre el cuerpo actúa un sistema de fuerzas cuya resultante es distinta de cero, el cuerpo llevará un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Δx = espacio recorrido = $v_o . t + 1/2 . \mathbf{a} . t^2$

Para poder calcular el espacio recorrido tenemos que hallar la aceleración a la que se mueve el cuerpo, lo haremos aplicando la segunda Ley de Newton en el eje x

$Rx = F_1 + F_2 - F_3 - Fr = m . a$

$14 N + 6 N - 8 N - 4 N = 2 kg * a$

$\mathbf{a} = 8 N / 2 kg = \mathbf{4 m / s^2}$

Una vez conocida la aceleración podemos calcular el espacio recorrido en 10 s, utilizando la ecuación anterior.

Como parte del reposo $v_o = 0$ m/ s

$\Delta \mathbf{x}$ = espacio recorrido = $v_o . t + 1/2 . a . t^2 = 0 m/s . 10 s + 1/2 . 4 m/s^2 . (10s)^2 = 0 + 1/2. 4. 100 =$ **200 m**

Para calcular el trabajo realizado por las fuerzas aplicamos la siguiente ecuación

$W_{F1} = F_1. \Delta x. \cos \alpha = 14 N . 200m . \cos 0º = 14 N . 200m . 1 = 2800 J$

$W_{F2} = F_2. \Delta x. \cos \alpha = 6 N . 200m . \cos 0º = 6 N . 200m . 1 = 1200 J$

$W_{F3} = F_3. \Delta x. \cos \alpha = 8 N . 200m . \cos 180º = 8 N . 200m . (-1) = - 1600 J$

$W_{Fr} = F_r. \Delta x. \cos \alpha = 4 N . 200m . \cos 180º = 4 N . 200m . (-1) = - 800 J$

Para calcular la potencia desarrollada por cada fuerza aplicamos esta ecuación:

$P = W / t$

$\mathbf{P_{F1}} = W / t = 2.800 J / 10 s =$ **280 w**

$\mathbf{P_{F2}} = W / t = 1.200 J / 10 s =$ **120 w**

$\mathbf{P_{F3}} = W / t = - 1.600 J / 10 s =$ **- 160 w**

$\mathbf{P_{Fr}} = W / t = - 800 J / 10 s =$ **- 80 w**

Ejercicio 5

Un saco de ladrillos de 200 Kg tiene que llevarse desde el suelo hasta el quinto piso (20 m) de una obra en construcción. Un obrero realiza esta tarea en media hora, y una grúa en 2 minutos. ¿Qué trabajo realiza la grúa? ¿y el obrero? Calcula la potencia en cada uno de los dos casos.

Ejercicio 6

En Gran Bretaña existe una unidad de potencia un tanto rara pero cuyo uso se ha extendido gracias al pasado poderío industrial de ese país: Es el caballo de vapor (CV), su equivalencia ya la conoces. Expresa las potencias halladas en el ejemplo anterior en caballos de vapor.

3) ENERGÍA

Es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar trabajo y producir cambios. Por lo tanto, las unidades de energía son las mismas que las de trabajo. Así, la unidad de energía en el sistema internacional es el Julio (J).

Hay muchos tipos de energías como por ejemplo: energía solar, eléctrica, luminosa, eólica, térmica, nuclear, etc. Nosotros vamos a estudiar tres tipos de energías que son, la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica.

3.1) ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA (EP)

Energía potencial gravitatoria (Ep) es la que posee un cuerpo debido a la posición que ocupa, es decir, por estar situado a una cierta altura. Matemáticamente, se define como:

Ep = m * g * h

m = masa del cuerpo (kg)

g = intensidad del campo gravitatorio (N / kg) = aceleración de la gravedad (m / s^2)

h = altura a la que se encuentra el cuerpo con respecto al nivel cero (podemos considerar el nivel cero el suelo)

La energía potencial gravitatoria se suele designar normalmente como energía potencial.

Como se puede observar a partir de la ecuación anterior, la energía potencial depende de la masa y la altura a la que se encuentre un cuerpo. A mayor masa y mayor altura, mayor energía potencial.

Ejemplo 4

Calcula la energía potencial que tiene un cuerpo de 8 kg que se encuentra a 50 m de altura.

m = 8 kg

h = 50 m

g = 9,8 N / kg

Ep = ?

Ep = m. g . h = 8 kg * 9,8 N / kg * 50 m = **3920 J**

Ejemplo 5

Un cuerpo que se encuentra a 20 m de altura tiene una Ep de 1000 J. Calcular cuál es su masa.

h = 20 m

Ep = 1000 J

g = 9,8 N / kg

m = ?

como la Ep = m * g * h

Despejamos la m de la ecuación anterior

m = Ep / g . h = 1000 J / 9,8 N / kg . 20 m = **5,1 kg**

Ejemplo 6

Una maceta de 500 g de masa tiene una energía potencial de 49 J cuando se encuentra en el balcón de un segundo piso, ¿a qué altura se encuentra?

Primero tenemos que expresar la masa en unidades del Sistema Internacional

m = 500 g = 500 g . 1 kg / 1000 g = 0,5 kg

Ep = 49 J

g = 9,8 N / kg

h = ?

como la Ep = m . g . h

Despejamos la h de la ecuación anterior

h = Ep / m . g = 49 J / 0,5 kg . 9,8 N / kg = **10 m**

Ejemplo 7

Completa la siguiente tabla.

Masa (kg)	Altura (m)	Energía potencial (J)	Trabajo que puede producir (J)
20	**5**		
4		**500**	
	10		**19600**

Tenemos que completar la tabla con los datos que poseemos, utilizando la ecuación

Ep = m . g . h

a) m = 20 kg

h = 5 m

Ep = ?

Ep = m . g . h = 20 kg . 9,8 N / kg . 5 m = **980 J**

b) El trabajo que puede producir es igual a la Ep almacenada.

c) m = 4 kg Ep =

500 J h = ?

Despejamos la altura (h) de la expresión Ep = m . g . h

h = Ep / m . g = 500 J / 4 kg . 9,8 N / kg = **12,76 kg**

d) El trabajo que puede producir es igual a la Ep almacenada.

e) El trabajo que puede producir es igual a la Ep almacenada.

f) h = 10 m

Ep = 19600 J

m = ?

Despejamos la masa (m) de la expresión Ep = m . g . h

m = Ep / g . h = 19600 J / 9,8 N / kg . 10 m = **200 kg**

Masa (Kg)	Altura (m)	Energía potencial (J)	Trabajo que puede producir (J)
20	**5**	980	980
4	12,76	**500**	500
200	**10**	19600	**19600**

Ejercicio 7

Calcula la energía potencial de una avioneta de 1500 kg que vuela a 700 m de altura.

Ejercicio 8

Un libro de 200 g se encuentra en una estantería. Si su energía potencial en ese punto es igual a 2,94 J, calcula a qué altura se encuentra

3.2) ENERGÍA CINÉTICA (EC)

Energía cinética es la que posee un cuerpo por el hecho de tener una velocidad. Su expresión matemática es la siguiente:

$Ec = 1 / 2 * m * v^2$

Ec = Energía cinética (J)

m = masa del cuerpo (kg)

v = velocidad a la que se mueve dicho cuerpo (m/s)

Como vemos a partir de la expresión anterior, la energía cinética depende de la masa y de la velocidad. A mayor masa y mayor velocidad, mayor energía cinética.

Ejemplo 8

Calcula la energía cinética que tiene un coche de 600 kg, que lleva una velocidad de 20 m/s .

m = 600 kg

v = 20 m/s

Ec = ?

$$\mathbf{Ec} = 1/2 \,.\, m \,.\, v^2 = 1/2 * 600\ kg * 20^2\ (m/s)^2 = \mathbf{120000\ J}$$

Ejemplo 9

Un cuerpo de 10 kg tiene una Ec de 4500 J, calcula su velocidad.

m = 10 kg

Ec = 4500 J

v = ?

$Ec = 1/2 * m * v^2$

Despejamos la velocidad de la ecuación anterior

$v^2 = 2 \,.\, Ec / m = 2.\ 4500\ J / 10\ kg = 900\ (m/s)^2$

v = 30 m/s

Ejercicio 9

Un coche de 1000 Kg marcha a una velocidad de 108 Km/h ¿Cuál es su energía cinética?

Ejercicio 10

Completa la siguiente tabla:

Masa (Kg)	Velocidad (m/s)	Energía cinética (J)
10	**20**	
	10	**2000**
5		**2250**

3.3) ENERGÍA MECÁNICA (EM)

La energía mecánica (Em) que posee un cuerpo es igual a la suma de su energía potencial (Ep) y su energía cinética (Ec) .

Em = Ep + Ec

Ejemplo 10

Un avión de 14000 kg vuela a 200 m de altura a una velocidad de 400 m/s. Calcula su energía mecánica.

Como Em = Ep + Ec y conocemos

m = 14000 kg
h = 200 m
v = 400 m/s
Em = ?

calcularemos primero sus Ep y Ec

Ep = m . g. h = 14000 kg . 9,8 N/kg . 200 m = 27440000 J = $2{,}774.10^7$ J

Ec = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 14000 kg . 400^2 $(m/s)^2$ = 1120000000 J = $1{,}12.10^9$ J

Em = Ep + Ec = $2{,}774.10^7$ J + $1{,}12.10^9$ J = **1147440000 J**

Ejemplo 11

Calcula la altura a la que se encuentra una piedra de 2 kg, cuando cae verticalmente, si su energía mecánica es 114 J y su velocidad 4 m/s al pasar por ese punto.

m = 2 kg
Em = 114 J
V = 4 m/s
h =?

Para poder calcular la h debemos averiguar la Ep en ese punto, ya que Ep = m . g .h

conocida la Ep, se despejaría la h de la ecuación anterior.

Como Em = Ep + Ec, calculamos la Ec ya que conocemos la velocidad de la piedra y despejamos la Ep de la ecuación anterior.

Ec = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 2 kg . 4^2 $(m/s)^2$ = 16 J

Ep = Em - Ec = 114 J – 16 J = 98 J

Una vez conocida la Ep, se despeja la altura de la ecuación Ep = m . g. h

h = Ep / m . g = 98 J / 2 kg . 9,8 N /kg = **5 m**

Ejercicio 11

Calcula la energía mecánica de un objeto de 3 kg que se mueve a 36 km/h a una altura de 15 m.

Ejercicio 12

Una niña de 20 kg corre por un puente de 30 m de altura. Si su energía mecánica es 9880 J ¿Cuál es su velocidad?

4) PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

El principio de conservación de la energía afirma que la energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma.

En las transformaciones que ocurren en la naturaleza se producen transferencias de energía de unos sistemas a otros en forma de trabajo o de calor. Como el trabajo que realiza un sistema físico es igual a la variación de energía mecánica.

$$W = \Delta Em$$

Si sobre un sistema no se realiza trabajo, ni el sistema realiza trabajo al exterior, el trabajo será nulo (W = 0) y la Em será constante. Por lo tanto, la energía mecánica de un sistema permanece constante cuando el trabajo es nulo. Por ello, se puede decir que la energía mecánica es constante siempre que no haya pérdidas en forma de rozamiento o calor.

Vamos a demostrar con el siguiente ejercicio que si no hay rozamiento (W = 0) se conserva la energía mecánica.

Ejemplo 12

Se lanza desde el suelo, y verticalmente hacia arriba, un cuerpo de 2 kg con una velocidad de 40 m/s. Se supone que no hay rozamiento.

Toma $g = 10\ m/s^2 = 10\ N/kg$

$m = 2\ kg$

$v = 40\ m/s$

- En el momento de lanzar el cuerpo (punto más bajo del recorrido del cuerpo) (punto A):

$$\text{Como } h_A = 0\ m \quad \rightarrow \quad Ep_A = m \cdot g \cdot h_A = 2\ kg \cdot 10\ N/kg \cdot 0\ m = 0\ J$$

$$v_A = 40\ m/s \quad \rightarrow \quad Ec_A = 1/2 \cdot m \cdot v_A^2 = 1/2 \cdot 2\ kg \cdot 40^2\ (m/s)^2 = 1600\ J$$

$$\mathbf{Em_A}\ (\text{punto más bajo}) = Ep_A + Ec_A = 0 + 1.600 = \mathbf{1.600\ J}$$

Esta energía mecánica es la que se conserva constante durante todo el recorrido del cuerpo, porque suponemos que no hay rozamiento entre el cuerpo que se lanza y el aire.

A medida que el cuerpo va subiendo su Ec va disminuyendo (ya que disminuye su velocidad), mientras que la Ep va aumentando (ya que aumenta su altura). La misma cantidad que disminuye la Ec, aumenta la Ep. Esto es debido a que la Ec se está transformando en Ep, pero siempre la Em vale lo mismo (permanece constante).

- Vamos a comprobar que se cumple este principio, calculando la Em al cabo de 1 s de ser lanzado el cuerpo (punto B):

Para poder hallarla tenemos que averiguar la altura que alcanza el cuerpo para poder saber cuál es su Ep y la velocidad para hallar su Ec al cabo de ese tiempo.

Cuando t = 1 s

Como el cuerpo lleva un MRUA

$$v_B = v_o + at = 40\ m/s - 10\ m/s^2 * 1\ s = 30\ m/s$$

$$\mathbf{Ec_B} = 1/2 \cdot m \cdot v_B^2 = 1/2 \cdot 2\ kg \cdot 30^2\ (m/s)^2 = \mathbf{900\ J}$$

$$h_B = e = vo\ t + 1 / 2\ at^2 = 40\ m/s * 1\ s + 1 / 2\ (-10\ m/s^2)\ 1^2\ s^2 = 35\ m.$$

$$\mathbf{Ep_B} = m \cdot g \cdot h_B = 2\ kg \cdot 10\ N/kg \cdot 35\ m = \mathbf{700\ J}$$

$\mathbf{Em_B}$ (al cabo de 1s de su lanzamiento) = $Ec_B + Ep_B = 900\ J + 700\ J = \mathbf{1.600\ J}$

Vemos que efectivamente se conserva la energía mecánica, y que lo que ha disminuido la Ec (1600J -900 J = 700 J) es la misma cantidad en la que ha aumentado su Ep (700 J – 0 J = 700 J).

- Veremos que ocurre lo mismo cuando han transcurrido 2 s desde el lanzamiento del cuerpo (punto C):

  Para ello, haremos los mismos cálculos que en el apartado anterior.

  Cuando t = 2 s

  Como el cuerpo lleva un MRUA

$$v_C = v_o + at = 40\ m/s - 10\ m/s^2 * 2\ s = 20\ m/s$$

$$\mathbf{Ec_C} = 1/2 \cdot m \cdot v_C^2 = 1/2 \cdot 2\ kg \cdot 20^2\ (m/s)^2 = \mathbf{400\ J}$$

$$h_C = e = vo\ t + 1/2\ at^2 = 40\ m/s * 2\ s + 1/2\ (-10\ m/s^2)\ 2^2\ s^2 = 60\ m.$$

$$\mathbf{Ep_C} = m \cdot g \cdot h_C = 2\ kg \cdot 10\ N/kg \cdot 60\ m = \mathbf{1200J}$$

$\mathbf{Em_C}$ (al cabo de 1s de su lanzamiento) = $Ec_C + Ep_C = 400\ J + 1200\ J = \mathbf{1.600\ J}$

  De nuevo, se ve que la energía mecánica tiene el mismo valor y que la cantidad en la que ha disminuido la Ec (1200 J) es la misma en la que ha aumentado el valor de su Ep (1200 J).

- Por último, calcularemos la Em cuando el cuerpo alcanza su altura máxima (punto más alto del recorrido del cuerpo) (punto D):

  En el momento en el que el cuerpo alcanza su altura máxima, éste se para (v = 0 m/s)

  Como $v_D = 0$ m/s → $\mathbf{Ec_D} = 1/2 \cdot m \cdot v_D^2 = 1/2 \cdot 2\ kg \cdot 0^2\ (m/s)^2 = \mathbf{0\ J}$

  Para calcular su Ep, tenemos que calcular la altura a la que ha llegado. Puesto que el cuerpo lleva un MRUA.

  $h_D = e = vo\ t + 1/2\ at^2$

  para poder hallar el espacio recorrido (h_D) por el cuerpo tenemos que calcular primero el tiempo que ha tardado en llegar a ese punto.

  Como conocemos

  $v_0 = 40$ m/s

  v = 0 m/s

  despejamos el t de esta ecuación $v = v_o + at$

  $t = v - v_0 / a = 0 - 40\ m/s / -10\ m/s^2 = 4\ s$

  $h_D = e = vo\ t + 1/2\ at^2 = 40\ m/s * 4\ s + 1/2\ (-10\ m/s^2)\ 4^2\ s^2 = 80\ m$

  $\mathbf{Ep_D} = m \cdot g \cdot h_D = 2\ kg \cdot 10\ N/kg \cdot 80\ m = \mathbf{1600\ J}$

  $\mathbf{Em_D}$ (punto más alto) = $Ec_D + Ep_D = 0\ J + 1600\ J = \mathbf{1.600\ J}$

  Como vemos, la energía mecánica siempre permanece constante y se cumple el principio de conservación de la energía si se supone que no hay rozamiento.

Cuando el cuerpo está bajando, su altura va disminuyendo, con lo que su Ep va disminuyendo. En cambio, su velocidad va aumentando con lo que su Ec va también aumenta. Esto significa que la Ep se está transformando en Ec, lo mismo que se pierde en Ep, se gana en Ec. Cuando llega al suelo se considera que h = 0 m, con lo que la Ep = 0 y la Em = Ec.

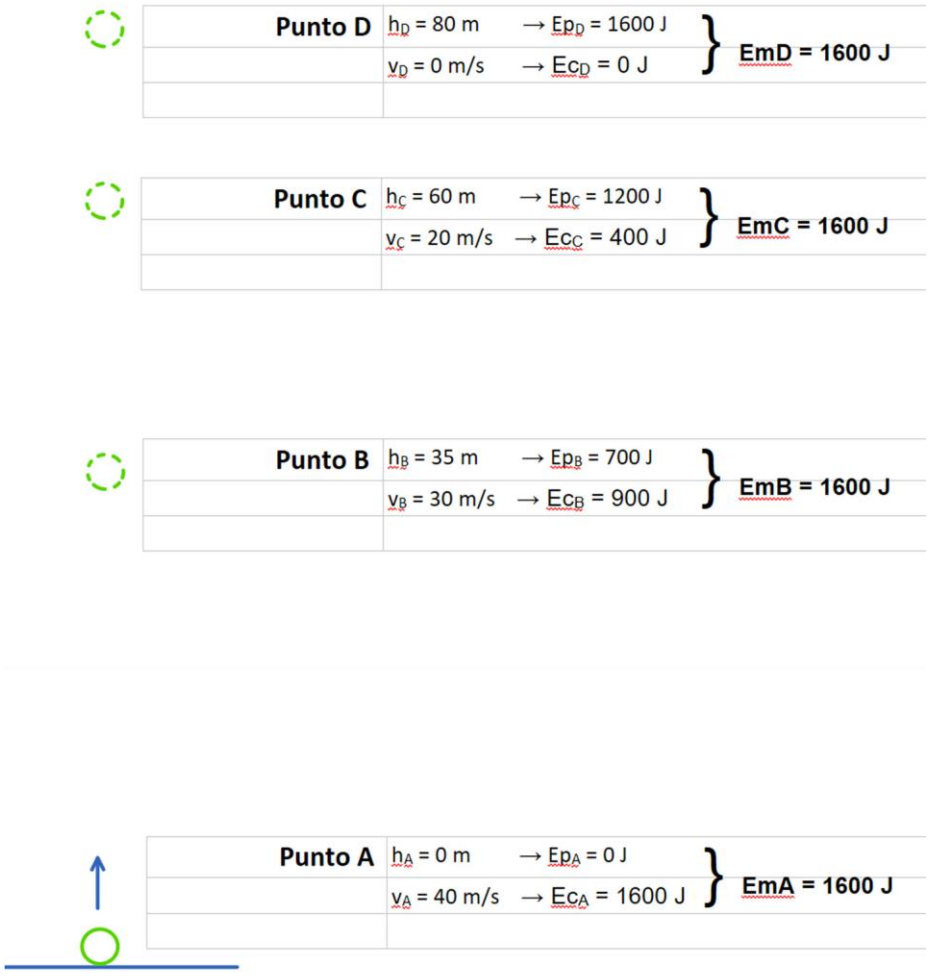


Imagen 11: Conservación de la energía en el tiro vertical.
Fuente: Elaboración propia.

Ejercicio 13

Se lanza desde el suelo, verticalmente hacia arriba, un cuerpo de 4 kg, con una velocidad de 60 m/s. Calcula la Ec y la Ep en los siguientes casos:

a) **En el momento de lanzarlo**
b) **Cuando su velocidad es de 20 m/s**
c) **Cuando está a 120 m de altura**
d) **En su altura máxima**

Ejercicio 14

Se lanza hacia arriba un balón de baloncesto cuya masa es de 650 g con una velocidad inicial de 7 m/s. Determina el valor de la energía mecánica en cada uno de los siguientes casos:

a) **En el instante del lanzamiento.**
b) **Al cabo de medio segundo de haber sido lanzado.**
c) **En el punto más alto de su trayectoria.**
d) **Suponiendo que no la toque ninguno de los jugadores, calcula la energía mecánica que tendrá cuando choque contra el suelo, si llega con una velocidad de 7m/s.**

Utilizando el principio de conservación de la energía podemos demostrar algunas de las características del movimiento de tiro vertical y caída de cuerpos, como las siguientes:

1.- La altura que alcanza un cuerpo cuando se lanza verticalmente hacia arriba sólo depende de la velocidad de lanzamiento y no de la masa (**Tiro vertical**).

Si suponemos que no hay rozamiento con el aire, la energía mecánica se conserva y, por tanto, la Em en el suelo (punto más bajo) es la misma que la Em en su punto más alto, con lo que las podemos igualar.

- Em (punto más bajo):

  h = 0 m → **Ep** = m . g. h = m . g . 0 m = **0 J**

  Ec = 1/2 . m. v_o^2

  Em (punto más bajo) = Ep + Ec = 0 + Ec = **Ec =** 1/2 . m. v_o^2

  En el punto más bajo toda la Em es Ec.

- Em (punto más alto):

  Como v = 0 m/s → **Ec** = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . m . 0^2 $(m/s)^2$ = **0 J**

  Ep = m . g . h = m . g . h máxima

  Em (punto más alto) = Ep + Ec = Ep + 0 = **Ep =** m . g . h máxima

  En el punto más alto toda la Em es Ep.

Como la Em permanece constante

Em (punto más bajo) = Em (punto más alto)

1/2 . m. v_o^2 = m . g . h máxima

Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación se puede eliminar

1/2 . v_o^2 = g . h máxima

Despejando la altura máxima: **h máxima = v_o^2 / 2g**

v_o = velocidad de lanzamiento

Como vemos, la altura que alcanza un cuerpo cuando se lanza hacia arriba sólo depende de la velocidad de lanzamiento y no de la masa.

Ejemplo 13

¿Qué altura máxima alcanzará una pelota cuando es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 5 m/s? Se supone que no hay rozamiento.

Como la Em permanece constante

Em (punto más bajo) = Em (punto más alto)

$1/2 \cdot m \cdot v_o^2 = m \cdot g \cdot h$ máxima

Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación se puede eliminar

$1/2 \cdot v_o^2 = g \cdot h$ máxima

Despejando la altura máxima:

h máxima = v_o^2 / 2g

v_o = velocidad de lanzamiento

h máxima = $v_o^2 / 2g = 5^2$ (m/s)^2 / 2 . 9,8 m/s^2 = **1,28 m**

2.- La velocidad con que llega al suelo un cuerpo, y por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al suelo, solo depende de la altura desde la que cae y no de la masa (**Caída libre**).

Si suponemos que no hay rozamiento con el aire, la energía mecánica se conserva y, por tanto, la Em en el punto de lanzamiento (punto más alto) es la misma que la Em en su punto más bajo, con lo que las podemos igualar.

- Em (punto más alto):

  Ep = m . g . h = m . g . h máxima

  Ec = 0 J , ya que se deja caer y eso significa que v = 0 m/s

  Em (punto más alto) = Ep + Ec = m . g . h máxima

  Si se deja caer un cuerpo (v = 0 m/s) en ese punto toda la Em es Ep.

- Em (punto más bajo):

  Ep = m . g. h = m . g . 0 m = **0 J**

  Ec = $1/2 \cdot m \cdot v^2$

  v = velocidad con la que llega al suelo.

  Em (punto más bajo) = Ep + Ec = 0 + Ec = **Ec =** $1/2 \cdot m \cdot v^2$

  En el punto más bajo toda la Em es Ec.

  Como la Em permanece constante

  Em (punto más alto) = Em (punto más bajo)

  m . g . h máxima = $1/2 \cdot m \cdot v^2$

  Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación y en los dos sumandos del primer miembro, se puede eliminar

g . h máxima = 1/2 . v^2

Despejando la velocidad con la que llega al suelo:

v^2 =2 . g . h máxima

Lo mismo pasa en este caso, la velocidad con que llega al suelo (v) un cuerpo, y por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al suelo, no depende de la masa del cuerpo.

Ejemplo 14

Se deja caer un cuerpo desde una altura de 20 m. Si se supone que no hay rozamiento, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

Como la Em permanece constante

Em (punto más alto) = Em (punto más bajo)

m . g . h máxima = 1/2 . m. v^2

Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación y en los dos sumandos del primer miembro, se puede eliminar

g . h máxima = 1/2 . v^2

Despejando la velocidad con la que llega al suelo:

v^2 =2 . g . h máxima = 2 . 9,8 N/kg . 20 m = 392 m/s

v = 19,8 m/s

Ejercicio 15

Se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, un cuerpo con una velocidad de 80 m/s, calcula cuál es la altura máxima que alcanza.

Ejercicio 16

Se deja caer un cuerpo desde una altura de 180 m. Calcular la velocidad con que llega al suelo.

5) TEMPERATURA Y CALOR

Todos sabemos que cuando calentamos un objeto su temperatura aumenta. Con frecuencia, en el lenguaje cotidiano se tiende a confundir los conceptos de calor y temperatura. Ambos están relacionados, pero son diferentes.

La temperatura, como vimos en el tema 4, es una magnitud física relacionada con la energía cinética media de las partículas de un cuerpo.

El calor (Q) es la cantidad de energía que transfiere un cuerpo a mayor temperatura ("caliente") a otro a menor temperatura ("frio") al estar en contacto. Es decir, el calor es una energía en tránsito, pasa de un cuerpo a otro.

Un cuerpo tiene temperatura pero no tiene calor, absorbe o cede calor. Los cuerpos transfieren calor y, debido a ello, pierden o ganan energía y, por ello, aumentan o disminuyen su temperatura. Para que exista transferencia de energía en forma de calor es necesario que haya una diferencia de temperatura entre los cuerpos entre los que se produce.

Como el calor es energía en tránsito, su unidad en el S. I. es el Julio (J). Otras unidades muy utilizadas son: 1 kJ = 1000 J

1 caloría (cal) = 4,18 J

Se denomina caloría " la cantidad de calor necesaria para que 1g de agua aumente 1ºC su temperatura" (más exactamente para pasar de 14,5 º a 15,5º).

1 kcal = 1000 cal

No todos los cuerpos transmiten el calor con igual facilidad, aunque sea igual la variación de la temperatura. El agua se ha utilizado para establecer la escala Celsius de temperaturas y tiene una excepcional cualidad que hizo que se eligiera para definir el patrón de la energía calorífica. El agua es una de las sustancias que, aunque reciba mucha energía calorífica, incrementa muy poco su temperatura. Esta cualidad del agua es la responsable del clima benigno (poco oscilante entre el día y la noche) en las proximidades del mar para una misma latitud terrestre.

Esta capacidad del agua de variar poco su temperatura aunque absorba o ceda mucho calor se representa mediante una magnitud llamada "**calor específico**" (c_e). El calor específico se define como el calor que absorbe 1 g de una sustancia para aumentar 1ºC su temperatura.

Calor específico del agua = 1 cal /g.ºC

En el S.I., calor específico del agua = 4180 J/kg.K

CALOR ESPECÍFICO (a 25 ºC)

SUSTANCIA	cal/g ºC	J/kg ·K
• Agua (líquida)	1,00	4180
• Agua (hielo)	0,49	2050
• Agua (vapor)	0,47	1960
• Aceite de oliva	0,47	2000
• Aire	0,24	1010
• Aluminio	0,22	900
• Alcohol etílico	0,59	2450
• Oro	0,03	130
• Granito	0,19	800
• Hierro	0,11	460
• Plata	0,06	240
• Acero inoxidable	0,12	510
• Madera	0,42	1760

Imagen 14: Tabla de calores específicos.
Fuente: image.slidesharecdn Autor: Desconocido Licencia: desconocida

Para calcular la cantidad de calor ganado o cedido por un cuerpo se utiliza la siguiente expresión matemática:

$$\mathbf{Q = m.\ c_e.\ (t_f - t_i)}$$

Q = calor ganado o cedido
m = masa del cuerpo
ce = calor específico del cuerpo
t_f = temperatura final
t_i = inicial

• Cuando un cuerpo absorbe o gana calor aumenta su temperatura → **$t_f > t_i$** → $t_f - t_i > 0$ → **Q ganado > 0.**

• Cuando un cuerpo desprende o cede calor disminuye su temperatura → **$t_f < t_i$** → $t_f - t_i < 0$ → **Q cedido < 0.**

Ejemplo 15

¿Qué cantidad de calor hay que comunicarle a 1,5 kg de agua para elevar su temperatura de 10ºC a 50ºC?

Calor específico del agua = 4180 J/kg.K = 4180 J/kg.ºC

Q = ?

m = 1,5 kg

t_i = 10ºC

t_f = 50ºC

Para calcular el calor que tiene que ganar esa masa de agua para aumentar su temperatura utilizamos la expresión siguiente:

La variación de temperatura tiene el mismo valor en ºC que en K.

Q ganado = m. c_e. (t_f –t_i) = 1,5 kg . 4180 J/kg.ºC . (50 - 10) ºC = **250800 J**

Como es calor absorbido o ganado es positivo.

Ejemplo 16

Calcula el calor cedido por 1500 g de agua si su temperatura disminuye de 50ºC a 10ºC.

Calor específico del agua = 4180 J/kg.K = 4180 J/kg.ºC

Q = ?

m = 1500 g = 1,5 kg

t_i = 50ºC

t_f = 10ºC

Q cedido = m. c_e. (t_f –t_i) = 1,5 kg . 4180 J/kg.ºC . (10 - 50) ºC = **- 250800 J**

Como es calor cedido es negativo.

Como se puede comprobar en los ejemplos 15 y 16, los calores ganado y cedido por la misma masas de agua para el mismo aumento de temperatura son iguales pero de distinto signo. El calor ganado positivo y el calor cedido negativo.

Cuando se ponen en contacto dos cuerpos a distinta temperatura, se transfiere calor del cuerpo a mayor temperatura al cuerpo a menor temperatura hasta que se igualan las temperaturas, consiguiendo lo que se llama el **equilibrio térmico.**

$$\mathbf{Q_{cedido} + Q_{ganado} = 0}$$

$$\mathbf{Q_{cedido} = m_{cede}.\ c_e.\ (t_f - t_i)}$$

$$\mathbf{Q_{ganado} = m_{gana}.\ c_e.\ (t_f - t_i)}$$

$$\mathbf{m_{cede}.\ c_e.\ (t_f - t_1) + m_{gana}.\ c_e.\ (t_f - t_2) = 0}$$

Ejemplo 17

Se mezclan 200 gramos de agua a 20ºC con 400 gramos de agua a 80ºC ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

Calor específico del agua = 4180 J/kg.K = 4180 J/kg.ºC

La temperatura final de la mezcla estará comprendida entre la temperatura del cuerpo que se encuentre a menor temperatura (20ºC) y la temperatura del que esté a mayor temperatura (80ºC). Es decir

20ºC < t final < 80ºC

El que se encuentre a menor temperatura ganará calor y el que se encuentre a mayor temperatura lo cederá.

m gana = 200g = 200g . 1 kg / 1000 g = 0,2 kg

t_i = 20ºC

t_f = ?

m cede = 400 g = 400g . 1 kg / 1000 g = 0,4 kg

t_i = 80ºC

t_f = ?

Para aplicar la t final aplicamos la siguiente ecuación $Q_{cedido} + Q_{ganado} = 0$

$m_{cede}. c_e. (t_f - t_i) + m_{gana}. c_e. (t_f - t_i) = 0$

y sustituimos los datos

0,4 kg . 4180 J/kg.ºC . (tf - 80) ºC + 0,2 kg . 4180 J/kg.ºC . (tf - 20) ºC = 0

1672 . tf - 133760 + 836. tf - 16720 = 0

2508 . tf - 150480 = 0

t final = 150480 / 2508 = **60ºC**

Ejercicio 17

Si se mezclan dos litros de agua a 40º C con un litro de agua a 20º C, ¿Cuál será la temperatura final?

Calor específico del agua = 4180 J / kgºC

Densidad del agua = 1 kg/l

Ejercicio 18

Mezclamos medio kilo de hierro a 550ºC con un litro de agua a 20ºC. ¿Cuál será la temperatura final de la mezcla?

Calor especifico de hierro 0,50 cal/g ºC

Calor especifico del agua 1cal/g ºC.

El calor además de una variación en la temperatura de los cuerpos puede producir cambios de estado físico en ellos. El calor que interviene en el cambio de estado se denomina calor latente. Para cada cambio de estado existe un calor latente distinto. Así, se habla de **calor latente de fusión (L_f)** y **calor latente de vaporización (L_v).** Su valor es distinto para cada sustancia.

Ejemplos de Calor Latente

Cuerpos	Fusión		Vaporización	
	Temperatura [ºC]	Calor Latente [Kcal/Kg]	Temperatura [ºC]	Calor Latente [Kcal/Kg]
Alcohol	-114	25	78	201
Plata	960	25	1950	520
Cobre	1083	50	2330	1110
Agua	0	80	100	580
Fundición	1100	34	100	531
Mercurio	-39	2,8	357	72
Plomo	327	5,7	1730	220
Carbono	3540	5,7	4000	12000

Imagen 14: Tabla de calores latentes
Fuente: hernanleon1002.files.wordpress Autor: Desconocido Licencia: Desconocida

Para calcular el calor necesario para fundir (Q fusión) o vaporizar (Q vaporización) una determinada cantidad de sustancia se multiplica la masa de la sustancia por el valor del calor latente correspondiente.

(Calor de fusión) $\mathbf{Q_f = L_f . m}$

(Calor de vaporización) $\mathbf{Q_v = L_v . m}$

Para procesos de solidificación y de licuación sirven las mismas fórmulas y los mismos calores latentes, pero el signo del calor será negativo, si se desprende.

Ejemplo 18

¿Qué cantidad de calor será necesaria para fundir una pieza de 300 g de hierro?

m = 300 g = 0,3 kg (Hay que expresar la masa en kg ya que el calor latente está expresado en J/kg)

L_f = 293000 J/kg

Q_f = ?

$\mathbf{Q_f}$ = m. L_f = 0,3 kg . 293000 J/kg = **87900 J**

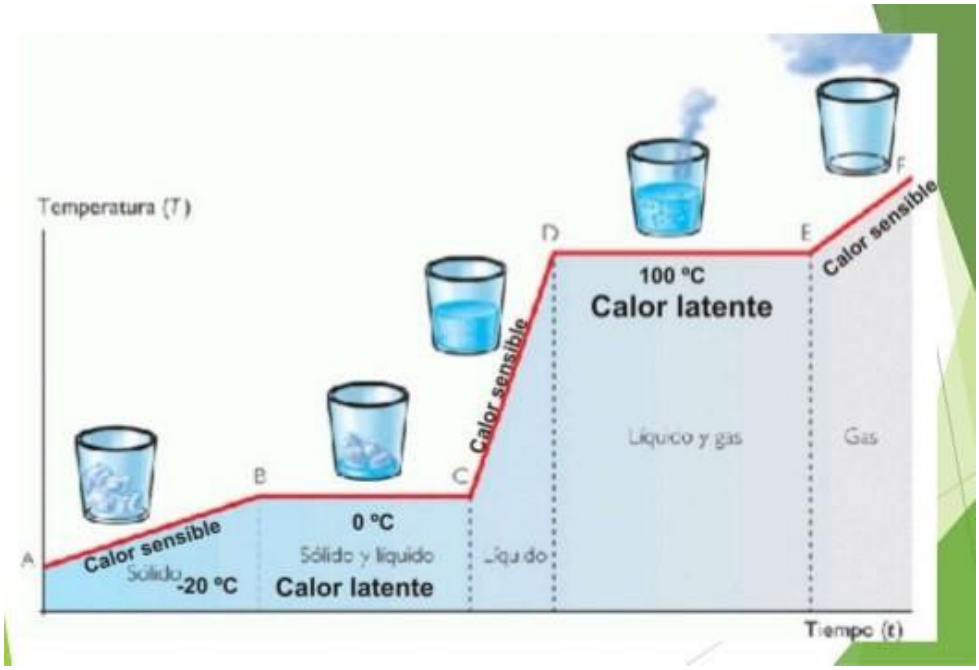


Imagen 15: Gráfica cambios de estado del agua.
Fuente: image.slidesharecdn. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

¿En cuál de las siguientes situaciones se realiza trabajo?

	a) Empujamos con fuerza la pared de la habitación
X	b) Levantamos un paquete del suelo
X	c) Empujamos el coche hasta el garaje
	d) Estudiamos

Ejercicio 2

Como podemos observar en el dibujo: $\mathbf{L_1 < L_2}$ y $\boldsymbol{\alpha > \beta}$

Es decir, a mayor longitud de la cuerda menor ángulo entre las direcciones de la fuerza y el desplazamiento. La dirección de la fuerza con la que arrastramos el cuerpo es la misma que la de la cuerda cuando está tensada.

Al atar una cuerda de mayor longitud (L_2) conseguimos que al tirar la cuerda forme con la dirección del desplazamiento un ángulo menor (β), sin necesidad de agacharnos, siendo por tanto mayor el coseno de dicho ángulo. Con la misma fuerza realizamos un trabajo mayor.

Nota: El valor del coseno es máximo, vale 1, para un ángulo de 0º, y desciende hasta su valor mínimo, 0, al formar un ángulo de 90º.

Ejercicio 3

m = 800 kg

h = 20 m

$W_{grúa}$ = ?

La Fuerza que hace la grúa para subir el coche a una velocidad constante es igual al peso del coche.

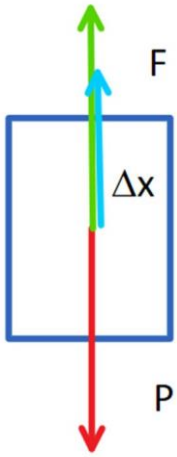


Imagen 9: Fuerzas que actúan sobre el coche. Fuente: Elaboración propia

F grúa = P coche

$W_{grúa} = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$

F = P = m . g = 800 kg. 9,8 N/kg = 7840 N

Δx = h = 20 m

$\alpha = 0^o$ (ya que F e Δx tienen la misma dirección y sentido) → cos 0^o = 1

$W_{grúa} = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = P \cdot \Delta x \cdot \cos 0^o = 7840\ N \cdot 20\ m \cdot 1 = 156800\ J$

como P = m . g e Δx = h , también se puede hacer así: $W_{grúa}$ = P . Δx = m . g . h

Cuando una máquina o alguien eleva un cuerpo a una determinada altura, el trabajo que realiza para hacerlo es: W = P . Δx = m . g . h, como se ha deducido anteriormente.

Ejercicio 4

m = 2 kg

Inicialmente en reposo → v_0 = 0 m/s

F1 = 16 N

Fr = 4 N

t = 3s

W_{F1} = ?

W_{Fr} = ?

Para poder calcular el W realizado por cada fuerza: W = F. Δ**x**. cos α, tenemos que averiguar el desplazamiento del cuerpo (Δx).

Como sobre el cuerpo actúa un sistema de fuerzas cuya resultante es distinta de cero, el cuerpo llevará un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

$$\Delta x = \text{espacio recorrido} = v_o \cdot t + 1/2 \cdot \mathbf{a} \cdot t^2$$

Para poder calcular el espacio recorrido tenemos que hallar la aceleración a la que se mueve el cuerpo, lo haremos aplicando la segunda Ley de Newton en el eje x

$Rx = F_1 - Fr = m \cdot a$

16 N - 4 N = 2 kg * a

a = 6 m / sg²

Una vez conocida la aceleración podemos calcular el espacio recorrido en 3 s, utilizando la ecuación anterior

Δ**x** = espacio recorrido = $v_o . t + 1/2 . a . t^2$ = 0 m/s . 3 s + 1/2 . 6 m/s^2. $(3s)^2$ = 0 + 1/2. 6. 9 = **27 m**

Para calcular el trabajo realizado por las dos fuerzas aplicamos la siguiente ecuación

$\mathbf{W_{F1}} = F_1 . \Delta x . \cos \alpha$ = 16 N . 27m . cos 0º = 16 N . 27m . 1 = **432 J**

$\mathbf{W_{Fr}} = F_r . \Delta x . \cos \alpha$ = 4 N . 27m . cos 180º = 4 N . 27m . (-1) = **- 108 J**

Ejercicio 5

El trabajo es el mismo el que realiza el obrero que el realizado por la grúa.

m = 200 kg

g = 9,8 m / s^2 = 9,8 N / kg

h = 20 m

El W realizado por ambos es W = m . g . h = 200 kg . 9,8 N / kg . 20 m = 39200 J

Para calcular la potencia aplicamos la siguiente ecuación: P = W / t

a) Potencia obrero:

t= 0,5 h = 30 minutos = 30 minutos . 60 s / 1 minuto = 1800 s

P obrero = W / t = 39200 J / 1800 s = **21,8 W**

b) Potencia grúa:

t = 2 minutos = 2 minutos. 60 s / 1 minuto = 120 s

P grúa = W / t = 39200 J / 120 s = **326,7 W**

Ejercicio 6

1 CV = 735 W

P obrero = 21,8 W = 21,8 W . 1 CV / 735 W = **0,03 CV**

P grúa = 326,7 W = 326,7 W . 1 CV / 735 W = **0,44 CV**

Ejercicio 7

m = 1500 kg

h = 700 m

Ep =?

Ep = m . g . h

Ep = 1500 kg . 9,8 N / kg . 700 m = 10290000 J = 10290 kJ

Cuando hablamos de cantidades grandes de energía podemos usar sus múltiplos, en este caso el kilojulio. 1 kJ = 1000 J

Ejercicio 8

Primero tenemos que expresar la masa en unidades del Sistema Internacional

m = 200 g = 200 g . 1 kg / 1000 g = 0,2 kg

Ep = 2,94 j J

g = 9,8 N / kg

h = ?

como la Ep = m . g . h

Despejamos la h de la ecuación anterior

h = Ep / m . g = 2,94 J / 0,2 kg . 9,8 N / kg = **1,5 m**

Ejercicio 9

En primer lugar debemos pasar la velocidad a unidades del sistema internacional, es decir en m/s.

v = 108 km/h = 108 km/h. 1000 m / 1 km . 1 h / 3600 s = 30 m/s

m = 1000 kg

Ec = ?

Ec = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 1000 kg . 30^2 $(m/s)^2$ = **450000 J**

Ejercicio 10

Tenemos que completar la tabla con los datos que poseemos, utilizando la ecuación

$$Ec = 1/2. m . v^2$$

a) m = 10 kg v = 20 m/s Ec = ?

Ec = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 10 kg . 20^2 $(m/s)^2$ = **2000 J**

b) v = 10 m/s

Ec = 2000 J

m = ?

como $Ec = 1/2 * m * v^2$

Despejamos la masa de la ecuación anterior

m = 2 . Ec / v^2 = 2. 2000 J / 10^2 $(m/s)^2$ = **40 kg**

c) m = 5 kg

Ec = 2250 J

v = ?

como $Ec = 1/2 * m * v^2$

Despejamos la velocidad de la ecuación anterior

v^2 = 2 . Ec / m = 2. 2250 J / 5 kg = 900 $(m/s)^2$

v = 30 m/s

Masa (Kg)	Velocidad (m/s)	Energía cinética (J)
10	**20**	2000
40	**10**	**2000**
5	30	**2250**

Ejercicio 11

En primer lugar, debemos pasar la velocidad a unidades del sistema internacional, es decir a m/s.

v = 36 km/h = 36 km/h. 1000 m / 1 km . 1 h / 3600 s = 10 m/s

Como Em = Ep + Ec y conocemos

m = 3 kg

v = 10 m/s

h = 15 m

calcularemos sus Ep y Ec

Ep = m . g. h = 3 kg . 9,8 N/kg . 15 m = 441 J

Ec = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 3 kg . 10^2 $(m/s)^2$ = 150 J

Em = Ep + Ec = 441 J + 150 J = **591 J**

Ejercicio 12

m = 20 kg

h = 30 m

Ec = 9880 J

v = ?

Para poder calcular la v debemos averiguar la Ec en ese punto, ya que Ec = 1/2 . m. v^2

conocida la Ec, se despejaría la v de la ecuación anterior.

Como Em = Ep + Ec

Calculamos la Ep ya que conocemos la altura a la que se encuentra la niña y despejamos la Ec de la ecuación anterior.

Ep = m . g . h = 20 kg . 9,8 N/Kg . 30 m = 5880 J

Ec = Em - Ep = 9880 J – 5880 J = 4000 J

Una vez conocida la Ec, se despeja la velocidad de la ecuación Ec = 1/2 . m. v^2

v^2 = 2 . Ec / m = 2 . 4000 J / 20 kg = 400 $(m/s)^2$

v = 20 m/s

Ejercicio 13

m = 4 kg

v = 60 m/s

Ec = ?

Ep = ?

a) En el momento de lanzarlo

h = 0 m → **Ep** = m . g. h = 4 kg . 9,8 N/kg. 0 m = **0 J**

v = 60 m/s → **Ec** = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 4 kg . 60^2 $(m/s)^2$ = **7200 J**

Em (punto más bajo) = Ep + Ec = 0 J + 7200 J = 7200 J

b) v = 20 m/s → **Ec** = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 4 kg . 20^2 $(m/s)^2$ = **800 J**

Como la Em se mantiene constante pues suponemos que no hay rozamiento

Em = Ep + Ec

Despejamos la Ep de la ecuación anterior

Ep = Em - Ec = 7200 J – 800 J = **6.400 J**

c) h = 120 m → **Ep** = m . g. h = 4 kg . 9,8 N/kg. 120 m = **4704 J**

Como la Em se mantiene constante pues suponemos que no hay rozamiento

Em = Ep + Ec

Despejamos la Ec de la ecuación anterior

Ec = Em - Ep = 7200 J – 4704 J = **2496 J**

d) En el punto más alto se para (v = 0 m/s)

v = 0 m/s → **Ec** = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 4 kg . 0^2 $(m/s)^2$ = **0 J**

Como la Em se mantiene constante pues suponemos que no hay rozamiento

Em = Ep + Ec

Despejamos la Ep de la ecuación anterior

Ep = Em - Ec = 7200 J – 0 J = **7200 J**

Al llegar al punto más alto, toda la Ec se transforma en Ep y, por tanto, toda la Em es Ec.

Ejercicio 14

a) En el instante inicial, el árbitro sostiene el balón a muy poca altura del suelo; por lo que para simplificar los cálculos supondremos como referencia de alturas (h = 0m), la altura desde la que se lanza el balón.

Expresamos la m en unidades del S.I.

m = 650 g = 650 g . 1 kg / 1000 g = 0,650 kg

Por lo tanto, en el punto de lanzamiento

h = 0 m → **Ep** = m . g. h = 0,650 kg . 9,8 N/kg. 0 m = **0 J**

v = 7 m/s → **Ec** = 1/2 . m. v^2 = 1/2 . 0,650 kg . 7^2 $(m/s)^2$ = **15,925 J**

Em (punto más bajo) = Ep + Ec = 0 J + 15,925 J = **15,925 J**

b) c) y d) Como se supone que no hay rozamiento la Em se conserva (Em = constante) y tendrá el mismo valor en cualquier punto del recorrido. Para estos apartados la

Em = 15,925

En todos los puntos de la trayectoria el balón posee la misma energía mecánica, E = 15,925 J. Es decir, que dicho valor permanece constante a lo largo de la misma. Si sobre un cuerpo en movimiento sobre una superficie de la Tierra no actúa ninguna fuerza salvo la de la gravedad, su energía mecánica, es decir, la suma de la energía cinética y la energía potencial, permanece constante en todo momento.

Ejercicio 15

Se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, un cuerpo con una velocidad de 80 m/s, calcula cuál es la altura máxima que alcanza.

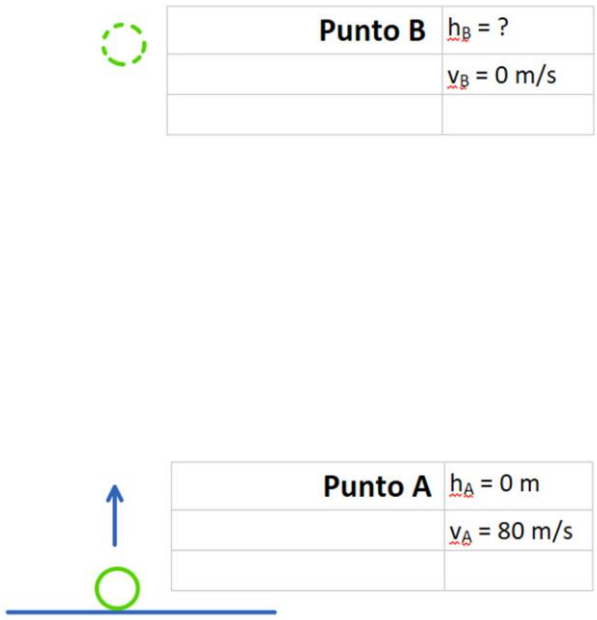


Imagen 12: Ejemplo tiro vertical
Fuente: Elaboración propia

v = 80 m/s

h máxima = ?

Como la energía mecánica permanece constante porque se supone que no hay rozamiento

Em punto más bajo (punto A) = Em punto más alto (punto B)

$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$

0 J (ya que h_A = 0 m) + 1/2 . m. v_A^2 = m . g . h_B + 0 J (ya que la v_B = 0 J)

$1/2 \cdot m. v_A^2 = m \cdot g \cdot h_B$

Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación se puede eliminar

$1/2 \cdot v_A^2 = g \cdot h_B$

Despejando h_B (h máxima)

$\mathbf{h_B} = v_A^2 / 2 \cdot g = 80^2 \text{ (m/s)}^2 / 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 =$ **326,5 m**

A partir de los datos del ejercicio podemos calcular la altura máxima a la que llega el cuerpo pero no sus energías potencial, cinética y mecánica. Para ello, necesitamos conocer la masa del cuerpo.

Ejercicio 16

Se deja caer un cuerpo desde una altura de 180 m. Calcular la velocidad con que llega al suelo.

Se deja caer significa que la v_A al soltarlo es 0 m/s (la velocidad en el punto más alto es 0). Este ejercicio es un ejemplo de caída libre de un cuerpo.

$h_A = 180$ m

$v_B = ?$

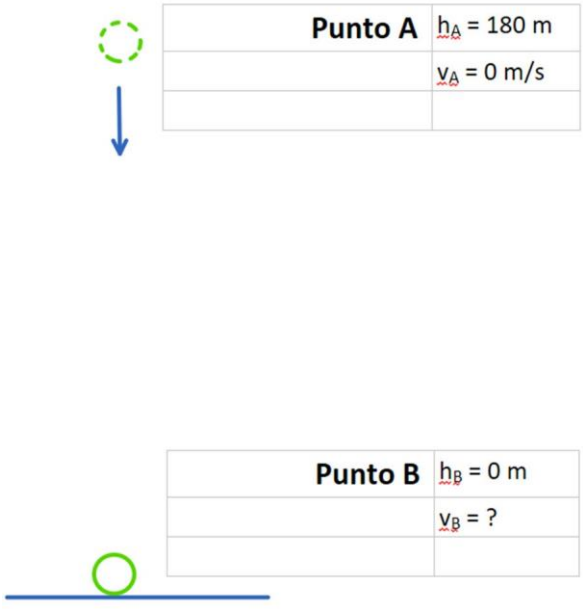


Imagen 13: Ejemplo caída libre.
Fuente: Elaboración propia.

Si suponemos que no hay rozamiento con el aire, la energía mecánica se conserva y, por tanto, la Em en el punto de lanzamiento (punto más alto) es la misma que la Em en su punto más bajo, con lo que las podemos igualar.

Em punto más alto (punto A) = Em punto más bajo (punto B)

$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$

$m \cdot g \cdot h_A + 0$ J (ya que la $v_A = 0$ J) = 0 J (ya que $h_B = 0$ m) + $1/2 \cdot m. v_B^2$

$m \cdot g \cdot h_A = 1/2 \cdot m \cdot v_B^2$

Como la masa se encuentra en los dos miembros de la ecuación se puede eliminar

$g \cdot h_A = 1/2 \cdot v_B^2$

Despejando v_B (velocidad con la que llega al suelo):

$v_B^2 = 2 \cdot g \cdot h_A = 2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 180\ m = 3528\ (m/s)^2$

v_B = 59,4 m/s

Ejercicio 17

Si se mezclan dos litros de agua a 40º C con un litro de agua a 20º C, ¿Cuál será la temperatura final?

Calor específico del agua = 4180 J / kgºC

Densidad del agua = 1 kg/l

La temperatura final de la mezcla estará comprendida entre la temperatura del cuerpo que se encuentre a menor temperatura (20ºC) y la temperatura del que esté a mayor temperatura (40ºC). Es decir

20ºC < t final < 40ºC

En este ejercicio en lugar de darnos la masa de agua nos dan su volumen. Como conocemos la densidad del agua. utilizaremos la fórmula d (densidad) = m (masa) / V (volumen).

Despejamos la masa de esa ecuación

m cede = d . V = 1 kg/l . 2 l = 2 kg

m gana = d . V = 1 kg/l . 1 l = 1 kg

El que se encuentre a menor temperatura ganará calor y el que se encuentre a mayor temperatura lo cederá.

m gana = 1 kg

t_i = 20ºC

t_f = ?

m cede = 2 kg

t_i = 40ºC

t_f = ?

Para aplicar la t final aplicamos la siguiente ecuación $Q_{cedido} + Q_{ganado} = 0$

$m_{cede} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i) + m_{gana} \cdot c_e \cdot (t_f - t_i) = 0$

y sustituimos los datos

2 kg . 4180 J/kg.ºC . (tf - 40) ºC + 1 kg . 4180 J/kg.ºC . (tf - 20) ºC = 0

8360 . tf - 334400 + 4180 . tf - 83600 = 0

12540 . tf - 418000 = 0

t final = 418000 / 12540 = **33,33 ºC**

Ejercicio 18

Mezclamos medio kilo de hierro a 550ºC con un litro de agua a 20ºC. ¿Cuál será la temperatura final de la mezcla?

Calor especifico de hierro 0,50 cal/g ºC

Calor especifico del agua 1cal/g ºC.

Vamos a realizar ese ejercicio usando unidades distintas de las del Sistema Internacional y una mezcla con dos cuerpos distintos, en este caso agua y hierro. Calor en calorías, masa en gramos y temperatura en Celsius. Así podemos usar los calores específicos que nos da el problema.

La temperatura final de la mezcla estará comprendida entre la temperatura del cuerpo (agua) que se encuentre a menor temperatura (20ºC) y la temperatura del que esté a mayor temperatura (550ºC) (hierro). Es decir

20ºC < t final < 550ºC

como el calor específico está expresado en cal/g . ºC

la masa la expresaremos en g

El que se encuentre a menor temperatura ganará calor y el que se encuentre a mayor temperatura lo cederá.

V agua = 1l → m = d . V = 1 kg/l . 1 l = 1 kg

m gana = 1 kg = 1000 g

ce agua = 1 cal/g.ºC

t_i = 20ºC

t_f = ?

m cede = 0,5 kg = 0,5 kg . 1000g / 1 kg = 500 g

t_i = 550ºC

ce hierro = 0,5 cal/g.ºC

t_f = ?

Para aplicar la t final aplicamos la siguiente ecuación $Q_{cedido} + Q_{ganado} = 0$

$m_{cede} . c_e . (t_f - t_i) + m_{gana} . c_e . (t_f - t_i) = 0$

y sustituimos los datos

500 g . 0,5 cal/g.ºC . (tf - 550) ºC + 1000 g . 1 cal/g.ºC . (tf - 20) ºC = 0

250 . tf - 137500 + 1000 . tf - 20000 = 0

1250 . tf - 157500 = 0

t final = 157500 /1250 = **126 ºC**

TAREAS. Bloque 12. Tema 8. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR

1.- Se arrastra un cuerpo por el suelo mediante una cuerda que forma un ángulo de 20º con la horizontal. Si se mueve el cuerpo 6 m aplicando una fuerza de 80 N a la cuerda, ¿Cuál es el trabajo realizado?

2.-Un ama de casa levanta una bolsa de 500 g hasta la superficie de una mesa de 70 cm de altura.

a) ¿Cuál es el peso de la bolsa y qué fuerza tendrá que hacer para levantarla?
b) ¿Cuál será el trabajo realizado?

3.- Un ascensor tiene una masa de 800 kg. Si sube a dos personas de 80 kg y 65 kg a una altura de 15 m, en un tiempo de 10 s. Calcula:
a) El trabajo realizado por el motor del ascensor en la subida.
b) Su potencia.

4.- Un horno microondas tiene una potencia de 600W. Calcula la energía que consume cuando se calienta un vaso de leche durante 1,5 minutos.

5.- Un niño de 30 kg tarda 0,5 minutos en subir unas escaleras. Si desarrolla una potencia de 98 W al subirlas. ¿Qué altura ha subido?

6.- ¿Cuál es la energía potencial de un hombre de 85 kg que se encuentra a 70 m de altura?

7.- ¿Cuánto ha aumentado la energía potencial de un objeto de 50 kg si lo elevamos desde una altura de 400 m a otra de 900 m?

8.- Si la energía potencial de una pelota de golf al ser golpeada es de 54,68J, ¿cuál será su masa si alcanza una altura de 28m?

9.- Un jugador de fútbol golpea verticalmente hacia arriba un balón de 500 g de masa. Calcula con qué energía golpeó el balón si éste alcanzó una altura de 25 m.

10.- Calcula la energía cinética de un tren de 900 toneladas que lleva una velocidad de 25 m/s.

11.- Una maceta cae de un balcón a una velocidad de 8 m/s adquiriendo una energía cinética de 128 J, ¿cuál es su masa?

12.- Un coche de 1500 kg que se mueve a velocidad constante tiene una energía cinética de 675000 J, ¿cuál es su velocidad?

13.- Un niño de 25 kg de peso, se encuentra a 2 m del suelo subido en un tobogán. Si cae y en un instante lleva una velocidad de 20 m/s. ¿Cuál es su energía cinética y potencial en ese momento? ¿Cuál será su energía mecánica?

14.- Calcular la energía mecánica de un avión de 2t que vuela con velocidad de 360 k/h a una altura de 300m.

15.- Si el avión del ejercicio anterior cayera en el suelo, calcular la velocidad con que llegaría al suelo.

16.- Se deja caer un objeto de 1 kg, desde una altura de 50 m. Si se supone que no hay rozamiento, calcula la energía mecánica en los siguientes casos:
a) En el momento en el que se deja caer.
b) Al segundo de dejarlo caer.
c) Al caer al suelo.

17.- Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de 300 g con una velocidad de 10 m/s desde el suelo. Se supone que no hay rozamiento.
Calcula:

a) energía cinética y potencial en el momento en que se lanza.
b) energía cinética y potencial al llegar al punto más alto.
c) altura máxima a la que sube.
d) Energía cinética cuando está a mitad de su recorrido.

18.- ¿Qué cantidad de calor hay que comunicarle a 3,4 kg de agua para elevar su temperatura de 10 a 100ºC?
Calor específico del agua es de 4180 J / kg .K

19.- Calcular la temperatura final (temperatura de equilibrio) de una mezcla formada por 2l de agua a 28 ºC y 10 L de agua a 46 ºC.
Calor específico del agua es de 4180J /kg.K
Densidad del agua = 1 kg/l

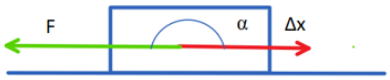
20.- Se mezclan 200 g de agua a 20 ºC con 300 g de alcohol a 50 ºC. Si el calor específico del alcohol es de 2450 J/kgK y el del agua 4180 J/kgK, calcula la temperatura final de la mezcla.

AUTOEVALUACIÓN Bloque 12. Tema 8. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR

1.- ¿En qué situaciones se realiza trabajo físico?

a) Sostener un cuerpo de 10 kg durante 10 s.
b) Llevar la bolsa de la compra por una calle horizontal.
c) Empujar el carrito de la compra.
d) Ninguna de las anteriores.

2.- ¿Qué trabajo realizará la fuerza F?



a) W = 0 J
b) W = F . Δx
c) W = - F . Δx
d) W = 10 J

3.- Arrastramos un baúl por el suelo mediante una cuerda que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Si movemos el baúl horizontalmente 2 m aplicando una fuerza de 300 N a la cuerda, ¿Cuál es el trabajo realizado?

a) 519,6 J
b) 300 J
c) 498 J
d) 530,4 J

4.- Un chico de 60 kg asciende por una cuerda hasta 8 de altura en 7 segundos. ¿Qué potencia desarrolla en la ascensión?

a) 700 J

b) 560 J

c) 650 J

d) 672 J

5.- ¿Qué potencia se realiza en la pregunta anterior?

a) 112,5 W

b) 122,5 W

c) 97,5 W

d) 100 W

6.- Una lavadora tiene una potencia de 1,5 kW. Calcula la energía que consume cuando se lava la ropa en un programa corto que tiene una duración de 20 minutos.

a) 1500 kW

b) 2000 kW

c) 1700 kW

d) 1800 kW

7.- ¿Cuál es la energía potencial de una mujer de 60 kg que se encuentra a 35 m de altura?

a) 20580 J

b) 2100 J

c) 21489 J

d) 22345 J

8.- Una grúa eleva una carga de 300 kg. ¿A qué altura debe subir para que adquiera una energía potencial de 13230 J?

a) 4 m

b) 3,5 m

c) 3 m

d) 4,5 m

9.- . ¿Qué masa tiene un cuerpo para que su energía potencial sea de 20580 J si se encuentra a 70 m del suelo?

a) 25 kg

b) 40 kg

c) 30 kg

d) 35 kg

10.- Halla la energía cinética de un coche de 1500 kg que va por una autopista a una velocidad constante de 108 km/h.

a) 600456 J

b) 162000 J

c) 675000 J

d) 184789 J

11.- Si en un momento determinado la energía cinética del coche anterior disminuye a 75000 J ¿qué velocidad lleva en dicho momento?

a) 54 km/h

b) 36 km/h

c) 40 km/h

d) 45 km/h

12.- Calcula la energía mecánica de un cochecito de 3 kg que rueda por encima de una mesa a 2 m/s y a 80 cm de altura.

a) 29,52 J

b) 59,76 J

c) 50,43 J

d) 36,74 J

13.- Un cuerpo de 1250 kg cae desde 50 m, ¿con qué energía cinética llega a tierra?

a) 708000 J

b) 566780 J

c) 600450 J

d) 612.500J

14.- Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de 100 g desde el suelo con una velocidad de 20 m/s. Se supone que no hay rozamiento. Calcula la energía cinética y la potencial en el momento en que se lanza.

a) 20 J y 20 J

b) 0 J y 20 J

c) 20 J y 0 J

d) 0 J y 0 J

15.- Para la pelota de la pregunta 14. Calcula la energía mecánica en el punto más alto que alcanza la pelota.

a) 0 J

b) 10 J

c) 15 J

d) 20 J

16.- Calcula la energía cinética y la potencial de la pelota de la pregunta 14 al llegar al punto más alto.

e) 20 J y 20 J

f) 0 J y 20 J

g) 20 J y 0 J

h) 0 J y 0 J

17.- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota de la pregunta 14?

a) 18,3 m

b) 20,4 m

c) 17,6 m

d) 22 m

18.- Se deja caer una pelota de 200 g desde un balcón situado a 50 m del suelo. Calcula la energía cinética y la potencial en el instante en que se deja caer.

a) 0J y 98 J

b) 98 J y 98 J

c) 0 J y 0 J

d) 98 J y 0 J

19.- Para la pelota de la pregunta 18. Calcula su energía mecánica cuando llega al suelo.

a) 0J

b) 98 J

c) 196 J

d) Ninguna de las anteriores.

20.- Calcula la energía cinética y la potencial de la pelota de la pregunta 18 en el instante en el que llega al suelo.

a) 0J y 98 J

b) 98 J y 98 J

c) 0 J y 0 J

d) 98 J y 0 J

21.- ¿Cuál es la velocidad en el instante en el que llega al suelo de la pelota de la pregunta 18?

a) 28,2 m/s

b) 31,3 m/s

c) 35 m/s

d) 0 m/s

22.- La unidad de temperatura en el sistema internacional (S.I.) es el:

a) Kg

b) ºC

c) K

d) J

23.- Calcula el calor cedido por 200 g de agua si su temperatura inicial era de 25ºC y la final de 15ºC. Calor específico del agua = 4180 J/kg.K

a) 8360 J

b) 8000 J

c) – 8000 J

d) – 8360 J

24.- Se tiene un recipiente que contiene 3 litros de agua a 20 ºC. Se añaden 2 litros de agua a 60 ºC. Calcular la temperatura final de la mezcla. DATO: c_e agua = 4180 J / kg .

a) 36ºC

b) 30ºC

c) 25ºC

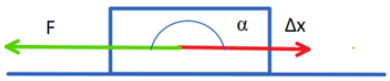
d) 40ªC

SOLUCIONES_AUTOEVALUACIÓN

1.- ¿En qué situaciones se realiza trabajo físico?

e) Sostener un cuerpo de 10 kg durante 10 s.
f) Llevar la bolsa de la compra por una calle horizontal.
g) Empujar el carrito de la compra.
h) Ninguna de las anteriores.

2.- ¿Qué trabajo realizará la fuerza F?



e) W = 0 J
f) W = F . Δx
g) W = - F . Δx
h) W = 10 J

3.- Arrastramos un baúl por el suelo mediante una cuerda que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Si movemos el baúl horizontalmente 2 m aplicando una fuerza de 300 N a la cuerda, ¿Cuál es el trabajo realizado?

e) 519,6 J
f) 300 J
g) 498 J
h) 530,4 J

4.- Un chico de 60 kg asciende por una cuerda hasta 8 de altura en 7 segundos. ¿Qué potencia desarrolla en la ascensión?

e) 700 J
f) 560 J
g) 650 J
h) 672 J

5.- ¿Qué potencia se realiza en la pregunta anterior?

e) 112,5 W
f) 122,5 W
g) 97,5 W
h) 100 W

6.- Una lavadora tiene una potencia de 1,5 kW. Calcula la energía que consume cuando se lava la ropa en un programa corto que tiene una duración de 20 minutos.

e) 1500 kW
f) 2000 kW
g) 1700 kW
h) 1800 kW

7.- ¿Cuál es la energía potencial de una mujer de 60 kg que se encuentra a 35 m de altura?

e) 20580 J
f) 2100 J
g) 21489 J
h) 22345 J

8.- Una grúa eleva una carga de 300 kg. ¿A qué altura debe subir para que adquiera una energía potencial de 13230 J?

e) 4 m
f) 3,5 m
g) 3 m
h) 4,5 m

9.- . ¿Qué masa tiene un cuerpo para que su energía potencial sea de 20580 J si se encuentra a 70 m del suelo?

e) 25 kg
f) 40 kg
g) 30 kg
h) 35 kg

10.- Halla la energía cinética de un coche de 1500 kg que va por una autopista a una velocidad constante de 108 km/h.

e) 600456 J
f) 162000 J
g) 675000 J
h) 184789 J

11.- Si en un momento determinado la energía cinética del coche anterior disminuye a 75000 J ¿qué velocidad lleva en dicho momento?

e) 54 km/h
f) 36 km/h
g) 40 km/h
h) 45 km/h

12.- Calcula la energía mecánica de un cochecito de 3 kg que rueda por encima de una mesa a 2 m/s y a 80 cm de altura.

e) 29,52 J
f) 59,76 J
g) 50,43 J
h) 36,74 J

13.- Un cuerpo de 1250 kg cae desde 50 m, ¿con qué energía cinética llega a tierra?

e) 708000 J
f) 566780 J
g) 600450 J
h) 612.500J

14.- Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de 100 g desde el suelo con una velocidad de 20 m/s. Se supone que no hay rozamiento. Calcula la energía cinética y la potencial en el momento en que se lanza.

i) 20 J y 20 J
j) 0 J y 20 J
k) 20 J y 0 J
l) 0 J y 0 J

15.- Para la pelota de la pregunta 14. Calcula la energía mecánica en el punto más alto que alcanza la pelota.

e) 0 J
f) 10 J
g) 15 J
h) 20 J

16.- Calcula la energía cinética y la potencial de la pelota de la pregunta 14 al llegar al punto más alto.

m) 20 J y 20 J
n) 0 J y 20 J
o) 20 J y 0 J

p) 0 J y 0 J

17.- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota de la pregunta 14?

e) 18,3 m
f) 20,4 m
g) 17,6 m
h) 22 m

18.- Se deja caer una pelota de 200 g desde un balcón situado a 50 m del suelo. Calcula la energía cinética y la potencial en el instante en que se deja caer.

e) 0J y 98 J
f) 98 J y 98 J
g) 0 J y 0 J
h) 98 J y 0 J

19.- Para la pelota de la pregunta 18. Calcula su energía mecánica cuando llega al suelo.

e) 0J
f) 98 J
g) 196 J
h) Ninguna de las anteriores.

20.- Calcula la energía cinética y la potencial de la pelota de la pregunta 18 en el instante en el que llega al suelo.

e) 0J y 98 J
f) 98 J y 98 J
g) 0 J y 0 J
h) 98 J y 0 J

21.- ¿Cuál es la velocidad en el instante en el que llega al suelo de la pelota de la pregunta 18?

e) 28,2 m/s
f) 31,3 m/s
g) 35 m/s
h) 0 m/s

22.- La unidad de temperatura en el sistema internacional (S.I.) es el:

e) Kg
f) ºC
g) K
h) J

23.- Calcula el calor cedido por 200 g de agua si su temperatura inicial era de 25ºC y la final de 15ºC. Calor específico del agua = 4180 J/kg.K

e) 8360 J
f) 8000 J

g) – 8000 J
h) – 8360 J

24.- Se tiene un recipiente que contiene 3 litros de agua a 20 ºC. Se añaden 2 litros de agua a 60 ºC. Calcular la temperatura final de la mezcla. DATO: c_e agua = 4180 J / kg .

e) 36ºC
f) 30ºC
g) 25ºC
h) 40ªC