BLOQUE 3. Tema 7

Expresiones algebraicas.
Ecuaciones y lenguaje algebraico

INDICE

Presentación

Diofanto de Alejandría fue un famoso matemático griego del que no se sabe con certeza cuándo nació. Lo que sí se sabe es la edad a la que murió, gracias al siguiente epitafio:

“Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte la medida de su edad. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero ¡ay!, niño tardío y desgraciado, en la mitad de la medida de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena cuatro años con esta ciencia del cálculo, llego al término de su vida”.

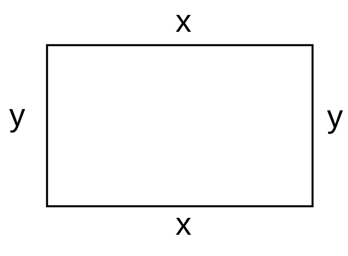
En este tema conoceremos un nuevo “idioma”, el lenguaje algebraico, y aprenderemos a utilizarlo para resolver problemas como éste.

1. Expresiones algebraicas

3ax + 2ay – 4xy

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar de forma generalizada la relación que existe entre varias magnitudes y poder realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes.

Ejemplo.- Expresar el valor del perímetro y del área de un terreno rectangular. Si suponemos que mide "**x**" metros de largo e "**y**" metros de ancho, obtendremos:



Perímetro: **2x + 2y**;

Área: **x · y**

Ambas son **expresiones algebraicas** (recuérdese que el signo de la multiplicación acostumbra a no ponerse).

Otras expresiones algebraicas podrían ser:

Suma de cuadrados: $\mathbf{a^2 + b^2}$

Triple de un número menos doble de otro: **3x - 2y**

Suma de varias potencias de un número: $\mathbf{a^4 + a^3 + a^2} + \mathbf{a}$

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por número y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el "**valor numérico**" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

En el ejemplo anterior, si el largo del terreno fueran 50 m (**x = 50)** y el ancho 30 m (**y = 30**), el valor numérico sería:

Perímetro = **2 · 50 + 2 · 30** = 100 + 60 = 160 m

Área = **50 · 30** = 1500 m^2

Naturalmente debe observarse que el valor numérico de una expresión algebraica no es único sino que depende del valor que demos a las letras que intervienen en ella.

Ya puedes realizar la **Tarea 1**

Actividad 1

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican:

a) 2x2 – 3x + 4 para x = -1

b) 3x2 + 2xy – 5y para x = -1, y = 3

12. Monomios

Si se observan las siguientes expresiones algebraicas se verá que en ellas aparecen distintas operaciones:

Ejemplo.- 1) $3ax$; 2) $-2xy^2$; 3) $8ab^3x$

En estas expresiones no aparecen sumas entre términos, siendo por ello denominadas **monomios**. Podemos por tanto decir que:

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama **coeficiente** de un monomio al número que aparece multiplicando a las letras. Normalmente se coloca al principio. **Si es un 1 no se escribe** y **nunca es 0** ya que la expresión completa sería 0. En los tres ejemplos de monomios anteriores los coeficientes son 3, -2 y 8 respectivamente.

Se llama literal de un **monomio** a las letras, con sus correspondientes exponentes y se denomina **grado** de un monomio a la suma de los exponentes de las letras. De este modo los tres monomios anteriores serán: el 1) de grado 2, el 2) de grado 3, el 3) de grado 5 (como es sabido cuando el exponente es 1 no se escribe).

En la mayor parte de los casos los monomios que se utilizarán serán más simples ya que sólo estarán formados por una letra, normalmente la x, el exponente correspondiente que será el grado del monomio y un coeficiente.

Por ejemplo: $-2x^2$, $3x$, $-5x^3$, x^5 son cuatro monomios de grados 2, 1, 3 y 5 respectivamente.

Los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros (por ejemplo: 0,6; 1/2; -5/6; etc.), aunque normalmente serán enteros y así lo vamos a suponer en este tema.

Ejemplo:

Monomio	***Coeficiente***	***Literal***	***Grado***
$3axy^2$	3	axy^2	4
$-5z^3$	-5	z^3	3
$-4x$	-4	x	1
x^3y^3	1	x^3y^3	6

12.1. Monomios semejantes

Son **monomios semejantes** entre sí aquellos que tienen la misma parte literal con los mismos exponentes.

Ejemplo.- Son monomios semejantes: $\mathbf{2ax^4y^3}$; $\mathbf{-3ax^4y^3}$; $\mathbf{ax^4y^3}$; $\mathbf{5ax^4y^3}$

Mientras que por ejemplo no son semejantes a los anteriores: $\mathbf{axy^3}$; $\mathbf{3a^2x^4y^3}$; $\mathbf{2bx^4}$

Por tanto:

Dos monomios semejantes sólo se pueden diferenciar en el coeficiente y siempre tendrán el mismo grado**.**

Actividad 2

Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes:

a) $2x^3$ b) $4x^4$ c) $-6x^2$ d) $\frac{4}{5}x^3$

e) $-2x$ f) $-\frac{1}{2}x^2$ g) $\frac{4}{5}x^3$ h) $-10x^4$

12.2. Suma y resta de monomios

Observar las siguientes operaciones:

Ejemplo.-

1) $5ax^4y^3 - 2ax^4y^3 = 3ax^4y^3$

2) $4ax^4y^3 + x^2y$

En el primer caso la resta de monomios se puede realizar mientras que en el segundo caso la suma no.

En el primer caso se trata de monomios semejantes y en el segundo no. Por tanto:

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La **suma o resta** es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Cuando los monomios no son semejantes la suma queda indicada y el resultado es un **polinomio** como veremos en este tema.

Ejemplo.- Observa las siguientes operaciones con monomios:

a) $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4 = 7ax^4 - 3ax^4 = 4\ ax^4$

b) $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x = 6x^3 + x$

Como puedes observar, se suman o restan los coeficientes de los monomios que son semejantes. Si no lo son no pueden sumarse, se deja la operación indicada.

Actividad 3

Efectúa las siguientes sumas y restas de monomios:

a) $5x^4 + 6x^4 =$

b) $2x^3 - 7x^3 + x^3 =$

c) $5x^2 + 4x^2 =$

d) $2x^5 + 6x^5 - 4x^5 =$

1.2.3. Producto de monomios

Para multiplicar monomios se debe recordar el producto de potencias que, como sabemos se puede realizar si tienen la misma base. Por ejemplo $\mathbf{5x^2 \cdot 3x^4 = 15x^6}$ ya que:

"Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes"

Pues bien:

Para **multiplicar monomios**, se multiplican los coeficientes de cada uno entre si y las potencias que tengan la misma base de cada uno, dejando las de distinta base como estén.

Ejemplo.- Calcular el producto de los siguientes monomios:
$\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3}$. Se procede de la siguiente forma:

Se multiplican los **coeficientes**: 4, 1 y 3 respectivamente. Resultado: **12**
Se multiplican todas las **potencias de base a (sumando los exponentes)**. Resultado: $\mathbf{a^2}$
Se multiplican todas las **potencias de base b**. Resultado: $\mathbf{b^2}$

Se multiplican todas las **potencias de base x**. Resultado: $\mathbf{x^6}$

Se multiplican todas las **potencias de base y**. Resultado: $\mathbf{y^7}$

Resultado final: $\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3 = 12a^2b^2x^6y^7}$

Ya puedes realizar la **Tarea 4**

Actividad 4

Realiza los siguientes productos de monomios:

a) $4x^2 \cdot (-2x) \cdot x =$

b) $x^2 \cdot x \cdot (-3x) =$

c) $2x \cdot (-2x) \cdot 2x =$

d) $\frac{4}{3}x^2 \cdot (-2x) =$

R

13. Polinomios

13.1. Definición y ejemplos de polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.

Si recordamos la suma de monomios, cuando estos no eran semejantes, no se podían sumar. En este caso lo que se obtiene es por tanto un polinomio.

Ejemplo.- Son polinomios las expresiones siguientes:

a) $\mathbf{4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3}$

b) $\mathbf{4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

En el primer caso el polinomio consta de la suma de tres monomios, cada uno de ellos es un **término** del polinomio. Por lo tanto, este polinomio tiene tres términos, cada uno con varias letras.

En el segundo caso, el polinomio tiene 5 términos. Si un término sólo consta de un número se le llama **término independiente:** 5 en el caso b) y 0 (no existe) en el caso a)

Cuando un polinomio consta de dos monomios se denomina **binomio**.

$x^2y + 3aby^2$

$2x + 3$

son ejemplos de binomios

Cuando consta de tres monomios se denomina **trinomio**: el **caso a)** anterior o $-2x^3 + 3x^2 + 5$ son dos trinomios.
Con más de tres términos (monomios) ya se denomina en general polinomio.

Respecto al **grado** de un polinomio, se dice que tiene por grado el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Así en el **caso a)** los grados de los monomios (suma de los exponentes de las letras) son 8, 3 y 6, luego el **grado del polinomio es 8**.

En el **caso b) el grado es 4**.

Los números que acompañan como factores a las letras (coeficientes de los monomios), se llaman también **coeficientes** del polinomio: 4, -2, 3, -2 y 5 respectivamente en el caso b).

"Lo más habitual que nos vamos a encontrar son polinomios del tipo del caso b), por tanto con una sola letra, que habitualmente será la x".

En este caso a la letra se le suele llamar variable.

Actividad 5

Indica el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - 1$

c) $4x - 7x^3 + 2$

R

13.2. Suma y resta de polinomios

La suma de polinomios se basa en la de monomios ya vista en este tema. Se podrán sumar los términos (monomios) que sean semejantes de los polinomios objeto de la suma.

(A partir de este momento trabajaremos ya sólo con polinomios con una sola letra (x) por considerar que son los más utilizados en la práctica)

Ejemplo.- Para calcular la suma de los polinomios:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$

Basta **sumar** los términos de grados 3, 2 y 1 de ambos polinomios y dejar el resto de los términos del primero como está.

Podemos indicar la suma de la siguiente forma para verla mejor. Colocamos los polinomios, uno debajo del otro, haciendo coincidir en la misma columna los monomios semejantes:

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & \cancel{-2x} & +5 \\ & 5x^3 & -x^2 & \cancel{+2x} & \\ \hline \mathbf{4x^4} & \mathbf{+3x^3} & \mathbf{+2x^2} & & \mathbf{+5} \end{array}$$

Por tanto:

Para **sumar** dos o más polinomios se suman los términos semejantes de cada uno de ellos.

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de ***restarlos****, debemos* ***sumar al primero el opuesto del segundo****; es decir, bastaría* ***cambiar el signo a todos los términos del segundo*** *y sumar los resultados.*

Ejemplo.- Para calcular la diferencia o resta de los dos polinomios anteriores:

$\mathbf{(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)}$

Se calcula la suma: $\mathbf{(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (-5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5}$

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +5 \\ & -5x^3 & +x^2 & -2x & \\ \hline \mathbf{-4x^4} & \mathbf{-7x^3} & \mathbf{+4x^2} & \mathbf{-4x} & \mathbf{+5} \end{array}$$

(Observa que hemos cambiado el signo a todos los términos del polinomio sustraendo)

Actividad 6

Dados los polinomios:

$P(x) = -3x^4 - 5x^2 + 1$

$Q(x) = x^3 - 6x + 3$

$R(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 6$

Calcula:

a) P(x) + Q(x)

b) P(x) – Q(x)

c) P(x) + Q(x) – R(x)

13.3. Producto de polinomios

Para **multiplicar** dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de unos por todos los del otro y sumar los resultados. ("Atención especial al producto de potencias de la misma base").

En el caso en que ambos polinomios consten de varios términos, se puede indicar la multiplicación de forma semejante a como se hace con número de varias cifras, cuidando de situar debajo de cada monomio los que sean semejantes.

En la siguiente imagen se puede ver el producto de dos polinomios de varios términos.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\
 & & & 2x & -3 \\
\hline
 & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\
4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\
\hline
4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3
\end{array}
$$

No siempre se realiza la multiplicación como en esta imagen. También se pueden colocar todos los términos seguidos y sumar después los que son semejantes. Así:

Ejemplo:

$(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5)\ (x + 1) = -2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 =$

$= \mathbf{-2x^4} + \mathbf{x^3 + x^2 + 3x + 5}$

Actividad 7

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-3x^4 - 5x^2 + 6) \cdot 6x$

b) $(3x^3 – 2x + 1) \cdot (2x – 3)$

Igualdades notables

Se denominan así a algunas operaciones con polinomios de especial interés ya que aparecerán frecuentemente en los cálculos.

Las más usuales son:

Cuadrado de un binomio: suma $(a + b)^2$ o diferencia $(a - b)^2$
Naturalmente realizar un cuadrado es multiplicar el binomio por sí mismo, luego:
$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

"El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo "
De modo similar: $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (igual que antes pero cambiando el signo central).

"En cualquier caso se debe tener en cuenta que el primer término "a" también puede ser negativo y por tanto cambiar el signo central". "En general se puede considerar siempre como una suma y para cada término asignarle el signo que le preceda (ver ejemplo)"

Ejemplo;

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(- x + 3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Suma por diferencia: se refiere al producto de la suma de dos monomios por la diferencia de ellos mismos:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba + b^2 = a^2 - b^2$

Siempre recordamos que " suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados".

Ejemplos:

a) $(x + 3) \cdot (x – 3) = x^2 – 3^2 = x^2 - 9$

b) $(2a + 3b) \cdot (2a – 3b) = (2a)^2 – (3b)^2 = 4a^2 – 9b^2$

¿Por qué son útiles los productos notables?

Si tenemos que hacer el cuadrado de un binomio de números podemos actuar de dos formas:

- $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$
- $(3 + 5)^2 = (3 + 5).(3+5) = 3.3 + 3.5 + 5.3 + 5.5 = 9 + 30 + 25 = 64$

Como vemos en el ejemplo, es más fácil sumar y luego elevar al cuadrado que utilizar el desarrollo del producto notable, pero ¿Qué ocurre si en vez de tener un binomio formado por dos números, uno de ellos es una letra? Entonces no podemos sumar y elevar, quedando únicamente la segunda opción:

- $(x + 5)^2 = (x + 5).(x + 5) = x^2 + 2.5.x + 5.5 = x^2 + 10.x + 25$

Otras igualdades importantes pero menos utilizadas son:

Cubo de una suma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cuadrado de un trinomio: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ya puedes realizar la **Tarea 8**

1.3.4. División de polinomios

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos rápidamente con los números, con los polinomios las vamos indicando. Veamos el proceso para dividir dos polinomios con un ejemplo:

$$\left(2x^3+3x-2\right):\left(x-3\right)$$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $2x^3$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad +3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

Multiplicamos x-3 por el monomio $2x^2$, y restamos el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad + \quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $6x^2$, y multiplicamos x-3 por ese monomio, restando de nuevo el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + \quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \\ \quad -6x^2 \;\; 18x & \\ \cline{1-1} \qquad 21x-2 & \end{array}$$

- Por último, buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado 21x, y repetimos el proceso:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & +3x & -2 & x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+6x+21 \\ \cline{1-3}
 & 6x^2 & +3x & -2 & \\
 & -6x^2 & +18x & & \\ \cline{2-4}
 & & 21x & -2 & \\
 & & -21x & +63 & \\ \cline{3-4}
 & & & 61 &
\end{array}
$$

- El resultado es: cociente = $2x^2+6x+21$ y resto = **61**

Actividad 8

Realiza la siguiente división:

$(3x^3 – 2x^2 – 4x – 4) : (x – 2)$

Para saber más

Puedes repasar las divisiones de polinomios con diferentes ejemplos aquí: **http://usuarios.lycos.es/calculo21/id80.htm**

En el siguiente enlace puedes practicar las divisiones con distintos ejercicios de autocomprobación:

http://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=div&a=3

2 Ecuaciones y lenguaje algebraico

2.1. Definiciones

Al comparar dos expresiones algebraicas mediante el signo matemático “igual” (=), creamos una **igualdad**. Esta igualdad puede observar tres tipos de soluciones:

1ª.- Que tenga infinitas soluciones y se denomina **identidad**.

Ejemplo.- $3b = b + b + b$

Podemos dar cualquier valor a "b" y siempre se cumplirá la igualdad.

2ª.- Que tenga una sola solución y se denomina **ecuación**.

Ejemplo.- $x = 3 + 1$

Solamente dando el valor 4 a "x" se cumplirá la igualdad. (Puede haber casos en los que la ecuación no tenga solución y dará igualdades del tipo $3 = 7$ o $1 = 2$).

21.1. Elementos de una ecuación

En toda ecuación se identifican unos elementos que la conforman:

Términos: Son cada uno de los monomios que forman la ecuación.
Miembros: Son los polinomios que se encuentran a ambos lados del signo igual. El primer miembro a la izquierda del signo y el segundo a la derecha.
Incógnita: Es la parte literal (habitualmente x) que es objeto del cálculo.

Primer miembro			Segundo miembro	
3	+ 4(5 + x)	=	3x	- 1
Término	Término		Término	Término

Las ecuaciones se clasifican según el grado del polinomio que las componen. De este modo podemos tener:

Ecuaciones de primer grado: $2x - 1 = x + 2$
Ecuaciones de segundo grado: $2x + 3 = x^2 – 5$

Y así sucesivamente. En este módulo vamos a estudiar las de primer grado, siendo las de segundo objeto de estudio en posteriores módulos.

Actividad 9

Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de primer grado:

a) 2x + 1 = 3x -2

b) x2 = 4

c) 2x2 = 3x + 1

d) 4x = 102

e) 2·(3x + 1) = 4·(2x – 5)

22. Pasos para resolver una ecuación de primer grado

Eliminación de denominadores

Si existen denominadores se eliminarán, aplicando el procedimiento del mínimo común múltiplo (M.C.M) (Recordar el cálculo del m.c.m. del Módulo 1). Es decir, se halla el mínimo común múltiplo de todos los denominadores y éste se divide entre cada denominador antiguo, multiplicando el resultado por su respectivo numerador.

<u>Ejemplo</u>.-

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$$

El m.c.m de los denominadores 2 y 3 es 6. Ponemos el mismo denominador en los dos miembros. Lo dividimos por cada denominador antiguo y el resultado lo multiplicamos por su respectivo numerador.

$$\frac{3x + 2x}{6} = \frac{6 \cdot 5}{6}$$

$$\frac{5x}{6} = \frac{30}{6}$$

A continuación eliminamos los denominares multiplicando los dos miembros por el m.c.m. En nuestro caso multiplicamos los dos miembros por 6 y nos queda:

$5x = 30$

Eliminación de paréntesis

Si existen paréntesis se operan para eliminarlos, teniendo buen cuidado de ir multiplicando los signos correspondientes. Para ello hay que tener en cuenta las reglas de los signos:

$$(+)\cdot(+) = (+)$$
$$(-)\cdot(-) = (+)$$
$$(+)\cdot(-) = (-)$$
$$(-)\cdot(+) = (-)$$

<u>Ejemplo</u>.-

$$3\cdot(x-2) - 2(x+1) = 3$$
$$3x - 6 - 2x - 2 = 3$$
$$x - 8 = 3$$

Transposición de términos

Se adopta el criterio de dejar en un miembro los términos que posean la incógnita y se pasan al otro miembro los demás. La transposición de términos se rige por las reglas:

Cualquier término que esté en un miembro sumando pasa al otro restando, y viceversa.

Cualquier término que esté en un miembro multiplicando pasa al otro dividiendo, y viceversa.

Reducción de términos semejantes

Se suman los términos de uno y otro miembro.

Despeje de la incógnita

Se deja la incógnita totalmente aislada y con signo positivo.

Ejemplo.-

$5x - 6x + 8 = 39 - 15x - 3$

Agrupo los términos con x en el primer miembro y los términos independientes (sin x) en el segundo:

$5x - 6x + 15x = 39 - 3 - 8$

Reduzco términos semejantes:

$14x = 28$

Como el 14 está multiplicando a x, pasa al otro miembro dividiendo:

$x = \frac{28}{14} = 2$

Ejemplos de resolución de ecuaciones:

a) $3x + 5 = x + 1$

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$\mathbf{3x - x = 1 - 5}$

Reduzco términos:

$\mathbf{2x = -4}$

Despejo x:

$\mathbf{x = \frac{-4}{2} = -2}$

b) $\mathbf{3 - x = -3\left(x + 5\right)}$

Primero elimino paréntesis, efectuando la operación:

$\mathbf{3 - x = -3x - 15}$

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$\mathbf{-x + 3x = -15 - 3}$

Reduzco términos:

$\mathbf{2x = -18}$

Despejo x:

$x = \dfrac{-18}{2} = \mathbf{-9}$

c) $\mathbf{\dfrac{3x}{2} + 7 = \dfrac{4x}{3} + 8}$

Primero hallamos el m.c.m de los denominadores m.c.m $(2{,}3) = \mathbf{6}$

Ponemos e el mismo denominador en ambos miembros:

$\mathbf{\dfrac{3 \cdot 3x}{6} + \dfrac{6 \cdot 7}{6} = \dfrac{2 \cdot 4x}{6} + \dfrac{6 \cdot 8}{6}}$

Multiplicamos los dos miembros por el m.c.m, que en este caso es 6, y desaparecen los denomadores:

$\mathbf{9x + 42 = 8x + 48}$

Agrupamos las x en el primer miembro:

$\mathbf{9x - 8x = 48 - 42}$

Reducimos terminos:

$\mathbf{x = 6}$

d) $\mathbf{\dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{x + 2}{3} = 6}$

Quitamos denominadores, teniendo en cuenta que m.c.m (2,3) = **6**

$\mathbf{\dfrac{3 \cdot (x - 1)}{6} + \dfrac{2 \cdot (x + 2)}{6} = \dfrac{6 \cdot 6}{6}}$

Eliminamos denominadores multiplicando los dos miembros por 6:

$\mathbf{3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x + 2) = 6 \cdot 6}$

Quitamos paréntesis:

$\mathbf{3x - 3 + 2x + 4 = 36}$

$\mathbf{3x + 2x = 36 + 3 - 4}$

$\mathbf{5x = 35}$

$\mathbf{x = \dfrac{35}{5} = 7}$

En los siguientes enlaces, puedes encontrar más ecuaciones de primer grado resueltas para practicar con ellas (intenta resolverlas y comprueba después la solución):

http://usuarios.lycos.es/calculo21/id104.htm

http://usuarios.lycos.es/calculo21/id106.htm

23. El lenguaje algebraico

La parte realmente práctica de todos los contenidos estudiados hasta ahora, consiste en traducir problemas de la vida cotidiana a un lenguaje algebraico para poder resolverlos.

En general, como ya sabemos, llamamos incógnita a la cantidad que es objeto de cálculo y la identificamos habitualmente con la letra "x" (aunque puede utilizarse cualquier letra). A esta incógnita le aplicamos las operaciones que deducimos del enunciado literal de los problemas.

Ejemplo.- El doble de un número: $2x$

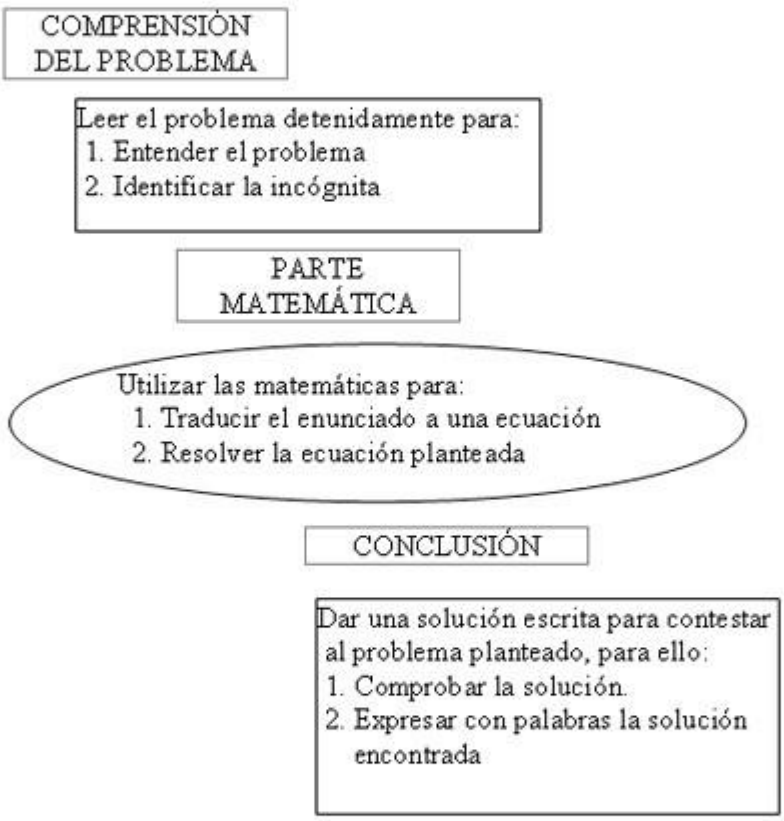
La mitad de un número: $\frac{x}{2}$

De esta forma traducimos los planteamientos literales en algebraicos.

Ejemplos de traducción a lenguaje algebraico.

24. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Para resolver problemas mediante ecuaciones debemos seguir el siguiente proceso:



<u>Ejemplo</u>.- *Si restamos 12 a un número lo reducimos a su tercera parte*.

Identificar la incógnita: x (el número que nos piden)

Plantear la ecuación: $x - 12 = \frac{x}{3}$

Resolver la ecuación: 3x – 36 = x

3x – x = 36

2x = 36

x = 18

Comprobar la solución: 18 – 12 = 6 ; $\frac{18}{3} = 6$; 6 = 6

Expresar con palabras la solución: El número pedido es el 18.

Actividad 10

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Cuál es el número?
2. Antonio dice a Juan: "El dinero que tengo es el doble del que tienes tú" y Juan contesta: "Si tú me das 6 euros, tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
3. Hallar el número de soldados de caballería, de infantería y de artillería, sabiendo:
   - El número total de soldados es de 2600.
   - Hay triple número de soldados de caballería que de artillería.
   - Hay triple número de infantería que de caballería.
4. Para repartir un lote de juguetes entre varios niños, se le da igual número de ellos a cada uno de los 15 presentes; pero llega un niño más y hay que dar a cada uno un juguete menos, sobrando 11 juguetes. ¿Cuántos juguetes corresponden a cada niño y cuántos había en total?

En el siguiente enlace, puedes ver un resumen muy completo de ecuaciones de primer grado y problemas:

http://mates1sec.googlepages.com/ecuacionesgrado1.ppt

PARA SABER MAS

Si quieres ampliar conocimientos puedes acceder a los siguientes recursos:

http://www.estudiantes.info/matematicas/problemas/3-eso/El-lenguaje-algebraico.htmh
ttp://www.thatquiz.org/es/previewtest?REUC5183
http://fds.oup.com/www.oup.com/word/es/12030230.doc
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/indice.htm

http://www.pnte.cfnavarra.es/iesmarci/departamentos/matematicas/ejercicios/1.pdf

3 Respuestas de las actividades

3.1. Respuestas de la actividad 1

a) $2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 = 2 \cdot 1 + 3 + 4 = 2 + 3 + 4 = 9$

b) $3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3 - 6 - 15 = 3 - 21 = -18$

3.2. Respuestas de la actividad 2

Son semejantes a), d) y g). También son semejantes c) y f). Por último, son semejantes b) y h).

3.3. Respuestas de la actividad 3

a) $5x^4 + 6x^4 = 11x^4$

b) $2x^3 - 7x^3 + x^3 = -4x^3$

c) $5x^2 + 4x^2 = 9x^2$

d) $2x^5 + 6x^5 - 4x^5 = 4x^5$

3.4. Respuestas de la actividad 4

a) $-8x^4$

b) $-3x^4$

c) $-8x^3$

d) $-\frac{8}{3}x^3$

3.5. Respuestas de la actividad 5

a) grado 3

b) grado 2

c) grado 3

3.6. Respuestas de la actividad 6

a)

$$\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & -3x^4 & & -5x^2 & & +1 \\
Q(x) = & & x^3 & & -6x & +3 \\
\hline
\mathbf{P(x) + Q(x) =} & \mathbf{-3x^4} & \mathbf{+x^3} & \mathbf{-5x^2} & \mathbf{-6x} & \mathbf{+4}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & -3x^4 & & -5x^2 & & +1 \\
-Q(x) = & & -x^3 & & +6x & -3 \\
\hline
\mathbf{P(x) - Q(x) =} & \mathbf{-3x^4} & \mathbf{-x^3} & \mathbf{-5x^2} & \mathbf{+6x} & \mathbf{-2}
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & -3x^4 & & -5x^2 & & +1 \\
Q(x) = & & x^3 & & -6x & \\
-R(x) = & -3x^4 & +4x^3 & +5x^2 & & -6 \\
\hline
\mathbf{P(x) + Q(x) =} & \mathbf{-6x^4} & \mathbf{+5x^3} & & \mathbf{-6x} & \mathbf{-5}
\end{array}$$

3.7. Respuestas de la actividad 7

a) $-18x^5 - 30x^3 + 36x$

b) $6x^4 – 9x^3 – 4x^2 + 8x - 3$

3.8. Respuesta de la actividad 8

Cociente: $3x^2 + 4x + 4$

Resto: 0

3.9. Respuestas de la actividad 9

Las ecuaciones de 1º grado son las: a), d) y e)

3.10. Respuestas de la actividad 10

1. El número es 15
2. Antonio tiene 24 euros y Juan 12
3. Caballería = 600 soldados; Infantería = 1800 soldados; Artillería = 200 soldados
4. A cada niño le corresponden 5 juguetes y en total hay 75 juguetes