

Bloque 2. Tema 4: Los Números Racionales y Decimales. Operaciones

ÍNDICE

1. Las fracciones
 - 1.1. Concepto
 - 1.2. Fracciones equivalentes
 - 1.3. Fracción propia e impropia
 - 1.4. Simplificación de fracciones
 - 1.5. La fracción como un operador
 - 1.6. Reducción de fracciones a un denominador común
 - 1.7. Comparación de fracciones
2. Operaciones con números racionales
 - 2.1. Suma y resta de números racionales
 - 2.2. Multiplicación de números racionales
 - 2.2.1. Números inversos
 - 2.3. División de números racionales
 - 2.4. Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones
3. Los números decimales
 - 3.1. Introducción
 - 3.2. Expresión decimal de los números racionales
 - 3.2.1. ¿Cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal?
 - 3.2.2. ¿Cómo se escribe una fracción ordinaria en forma de número decimal?
 - 3.2.3. Números decimales periódicos
 - 3.3. Cálculo de fracciones generatrices
 - 3.3.1. Decimales exactos
 - 3.3.2. Decimales periódicos puros

4. Operaciones con números decimales

4.1. Suma y resta de números decimales

4.2. Multiplicación de números decimales

4.2.1. Multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros

4.2.2. Multiplicación de dos números decimales

4.3. División de números decimales

4.3.1. División de un número decimal por la unidad seguida de ceros

4.3.2. División de un número decimal por un número entero

5. Respuestas de las actividades

Presentación del tema

La carrera automovilística de las 24 horas de Le Mans es una prueba de resistencia que se disputa anualmente cerca de Le Mans, en Francia.

Los participantes, deben dar el mayor número posible de vueltas a un circuito semipermanente de 13,65 km de longitud, durante 24 horas seguidas.

Cada equipo está formado por tres pilotos que se relevan cada dos horas, por lo que cada piloto hace $\frac{1}{3}$ de la carrera y descansa los $\frac{2}{3}$, aunque antes de 1970 sólo se

permitían dos pilotos por vehículo. ¿Qué fracción de la carrera realizaba entonces cada piloto?

En este tema trabajaremos con fracciones y números decimales como los que aparecen en este texto. Como podrás apreciar, unos y otros están muy presentes en nuestra vida cotidiana.

1. Las fracciones

1.1. Concepto

Seguramente más de una vez hemos visto en los medios de comunicación, en los comercios, o hablando con algún amigo expresiones de este tipo:

- Un tercio de las patatas “chips” es grasa.
- El tren con destino a Madrid trae un retraso de tres cuartos de hora.
- Uno de cada 100 nacidos en España es celíaco.
- Los gastos, que ascienden a 3450 €, tienen que repartirse entre los 12 vecinos del inmueble.

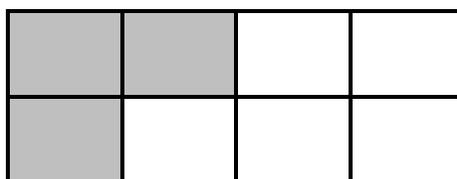
Todas estas formas de hablar se representan en matemáticas por un tipo de números que se llaman fraccionarios:

Fracción es una o varias partes iguales en que dividimos la unidad. Las fracciones representan siempre una cierta parte de "algo". Ese "algo" es la unidad que elegimos.

Una fracción es un par de números naturales a y b en la forma $\frac{a}{b}$

El número de abajo se llama **denominador** e indica las partes iguales en que dividimos la unidad.

El número de arriba se llama **numerador** e indica las partes que cogemos.



La figura se ha dividido en 10 partes de las que 3 están sombreadas y siete no.

La fracción de figura sombreada es $\frac{3}{10}$.

La fracción de figura no sombreada es $\frac{7}{10}$.

Por ejemplo:

- Si tenemos 10 caramelos y los repartimos entre cinco niños, cada niño toca a dos caramelos, la fracción asociada es $\frac{10}{2}$.
- Si vamos a una fiesta y la tarta se parte en nueve trozos, y yo me como 2, la fracción asociada es $\frac{2}{9}$.
- Por último, si tenemos diez caramelos y cero niños, ¡no tenemos a quién dar caramelos!, por lo que no tiene sentido repartir nada, es decir, no tienen sentido fracciones como $\frac{10}{0}$.

¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el número b no puede ser cero.

Para leer una fracción se dice primero el numerador y después el denominador.

Cuando el denominador es mayor de 11, se le añade la terminación **avo**.

Ejemplos de lectura de fracciones:

$\frac{3}{2}$ → tres medios	$\frac{5}{8}$ → cinco octavos
$\frac{4}{3}$ → cuatro tercios	$\frac{2}{9}$ → dos novenos
$\frac{6}{5}$ → seis quintos	$\frac{3}{10}$ → tres décimos
$\frac{1}{6}$ → un sexto	$\frac{4}{15}$ → cuatro quince avos
$\frac{2}{7}$ → dos séptimos	$\frac{5}{24}$ → cinco veinticuatro avos

1.2. Fracciones equivalentes

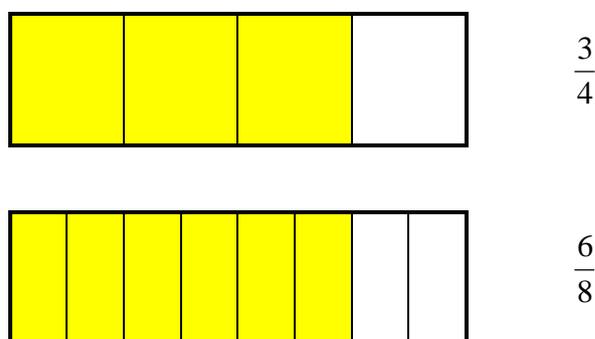
Si se reparten 6€ entre tres personas ¿Cuánto recibe cada una? ¿Y si se reparten 12€ entre seis personas?

Puedes comprobar que en ambos casos el resultado es el mismo.

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2€$$

Dos **fracciones son equivalentes** cuando escritas de distintas maneras tienen el mismo resultado.

Veámoslo con un gráfico:



Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, basta con multiplicar en cruz y observar que el resultado obtenido es el mismo.

Para multiplicar en cruz se opera de la siguiente manera: numerador de la primera fracción por denominador de la segunda fracción y denominador de la primera fracción por numerador de la segunda.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ si se cumple que } 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

En general $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y del denominador por el mismo número. Si obtenemos fracciones equivalentes mediante multiplicaciones, se denominan **fracciones amplificadas**:

Módulo 1. Bloque 2. Tema 4. Los números racionales y decimales. Operaciones.
Cepa los Llanos. Albacete

Ejemplos:

a) $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$	b) $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48}$	c) $\frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{10}{2}$
--	--	---

Si obtenemos fracciones equivalentes mediante divisiones, se denominan **fracciones simplificadas**:

Ejemplos:

a) $\frac{12}{24} = \frac{12 : 2}{24 : 2} = \frac{6}{12}$	b) $\frac{6}{12} = \frac{6 : 3}{12 : 3} = \frac{2}{4}$
---	--

Si tenemos dos fracciones equivalentes y a una de ellas le falta un término, es fácil calcularlo:

Ejemplo: Calcula la fracción que es equivalente a $\frac{4}{7}$ y que tiene por numerador 8.

Solución: Tendríamos la siguiente igualdad: $\frac{4}{7} = \frac{8}{x}$. Multiplicamos en cruz

los términos de ambas fracciones y obtenemos: $4 \cdot x = 8 \cdot 7$

Pasamos el 4 al otro término de la igualdad y pasa realizando la operación contraria a la que estaba realizando; es decir, pasa dividiendo. De esta forma, obtenemos:

$x = \frac{8 \cdot 7}{4} = \frac{56}{4} = 14$. Por tanto la fracción que es equivalente a $\frac{4}{7}$ y que tiene

por numerador 8 es $\frac{8}{14}$.

Veamos **qué sucede cuando las fracciones tienen un signo negativo** en el numerador o en el denominador.

Ejemplo: ¿Será equivalente $\frac{-3}{5}$ a $\frac{3}{-5}$? Para responder, multiplicamos en

cruz:

$$-3 \cdot (-5) = 3 \cdot 5; \quad 15 = 15; \quad \text{luego sí son equivalentes.}$$

En general, cualquier fracción de la forma $\frac{-a}{b}$ es equivalente a la fracción $\frac{a}{-b}$, pero

resulta más cómodo tener el signo negativo (-) en el numerador.

Veamos ahora **qué sucede cuando las fracciones tienen un signo negativo en el numerador y en el denominador.**

Ejemplo: ¿Será equivalente $\frac{-4}{-7}$ a $\frac{4}{7}$? Para responder, multiplicamos en cruz:

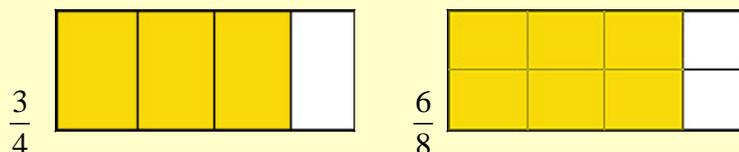
$$-4 \cdot 7 = -28; \quad -28 = -28; \quad \text{luego sí son equivalentes.}$$

En general, cualquier fracción de la forma $\frac{-a}{-b}$ es equivalente a la fracción $\frac{a}{b}$, pero

resulta más cómodo tener el numerador y el denominador positivos, que ambos negativos.

NÚMEROS RACIONALES: veamos el siguiente ejemplo:

- $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son dos fracciones distintas, pero equivalentes, ya que $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, gráficamente esta equivalencia se representa así:



- Como vemos, ambos números significan lo mismo, por lo que son **EL MISMO NÚMERO RACIONAL.**

En general, decimos que un número racional es una fracción y todas las que son equivalentes a ella.

El conjunto de los números racionales se representa con la letra **Q**.

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/
Fracciones_1.htm#equivalentes](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_1.htm#equivalentes)

1.3. Fracción propia e impropia

Fracción propia es la que el numerador es menor que el denominador. El valor de esta fracción es menor que la unidad.

Ejemplos:

a) $\frac{4}{6} < 1$	b) $\frac{2}{5} < 1$	c) $\frac{1}{4} < 1$
----------------------	----------------------	----------------------

Fracción impropia es la que el numerador es igual o mayor que el denominador.

Si el numerador y el denominador son iguales, la fracción vale una unidad.

Ejemplos:

a) $\frac{6}{6} = 1$	b) $\frac{2}{2} = 1$	c) $\frac{4}{4} = 1$
----------------------	----------------------	----------------------

Si el numerador es mayor que el denominador, la fracción vale más que la unidad.

Ejemplos:

a) $\frac{4}{3} > 1$	b) $\frac{7}{5} > 1$	c) $\frac{8}{3} > 1$
----------------------	----------------------	----------------------

En resumen:

numerador < denominador	Fracción < 1	Fracción propia
numerador = denominador	Fracción = 1	Fracción impropia
numerador > denominador	Fracción > 1	Fracción impropia

1.4. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente cuyos términos sean números más pequeños.

Para simplificar se divide el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número que sea divisor de ambos.

Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que es **irreducible** y sus términos son primos entre sí.

Para simplificar una fracción y obtener su fracción irreducible, se calcula el máximo común divisor (m.c.d.) del numerador y del denominador y se dividen ambos por dicho m.c.d.

Recuerda que en el bloque anterior se estudió cómo calcular el máximo común divisor.

**Módulo 1. Bloque 2. Tema 4. Los números racionales y decimales. Operaciones.
Cepa los Llanos. Albacete**

Quiere decir que podemos dividir a la localidad en 7 grupos iguales, de los cuales 2 serán jóvenes y 5 personas mayores. También lo podemos decir de otra forma: por cada 7 personas que hay, 2 son jóvenes y 5 adultos.

Si no sabemos cuántas personas hay en la localidad, no podremos averiguar nada más.

Si nos dicen que en esa localidad hay 2.275 habitantes, sí podremos calcular cuántos serían jóvenes.

Hemos dicho que $\frac{2}{7}$ significa dividir la población en 7 partes iguales y tomar 2.

Por lo tanto, las operaciones que debemos hacer son:

$$2275 : 7 = 325; \quad 325 \cdot 2 = 650, \text{ que serán los jóvenes}$$

También podemos hacer las operaciones en orden contrario y el resultado será el mismo:

$$2275 \cdot 2 = 4550; \quad 4550 : 7 = 650$$

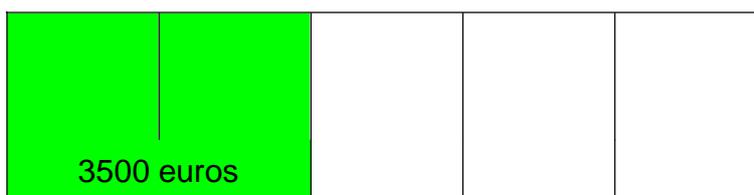
La forma de expresarlo es: $\frac{2}{7}$ de 2275 = 650, o bien: $\frac{2}{7}(2275) = 650$

A veces se nos puede plantear el problema en sentido contrario.

EJEMPLO 2

Una persona recibe los $\frac{2}{5}$ de un premio. Si ha recibido 3500 euros, ¿cuánto era el premio total?

Veámoslo con un gráfico:



Solución:

El premio se ha dividido en 5 partes, de las cuales esa persona ha recibido 2 partes. Por tanto, habrá que dividir la cantidad entre 2 y multiplicar el resultado por 5: $3500 : 2 = 1750$; $1750 \cdot 5 = 8750$ euros era el importe del premio.

Aunque en la práctica lo que se suele hacer es:

1º multiplicar la cantidad por 5: $3500 \cdot 5 = 17500$

2º dividir el resultado por 2: $17500 : 2 = 8750$

Actividad 2

1. Calcula:

a) $\frac{2}{5}$ de 150 =

b) $\frac{5}{7}$ de 2100 =

c) $\frac{9}{25}$ de 5000

d) $\frac{3}{4}$ de 1440

2. Al estreno de una obra han asistido 288 personas, de las que $\frac{12}{7}$ son

12

mujeres. ¿Cuántos hombres asistieron?

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/

[Fracciones_3.htm](#)

1.6. Reducción de fracciones a un denominador común

Para expresar varias fracciones con el mismo denominador vamos a utilizar el método del mínimo común múltiplo (m.c.m.). Para ello seguiremos estos pasos:

1. Se halla el m.c.m. de los denominadores.
2. Se coloca el m.c.m. como denominador común a todas ellas.
3. Para hallar el numerador de cada fracción se divide el m.c.m. por el denominador que tenía la fracción y el cociente obtenido se multiplica por el numerador.

Ejemplo: Vamos a reducir a común denominador las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$.

Solución: Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

m.c.m. (3,6,4) = 12; que será el nuevo denominador de todas ellas,

y calculamos los numeradores:

$$\frac{2}{3} \in \frac{12:3 \cdot 2}{12} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{5}{6} \in \frac{12:6 \cdot 5}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4} \in \frac{12:4 \cdot 3}{12} = \frac{9}{12}$$

Para saber más:

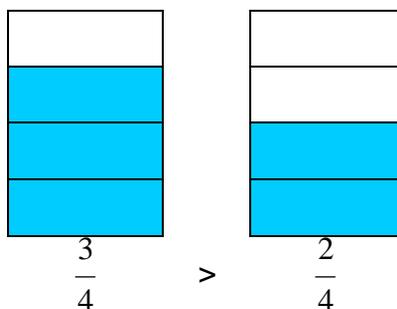
Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/
Fracciones_1.htm#comun](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_1.htm#comun)

1.7. Comparación de fracciones

Vamos a distinguir dos tipos de fracciones:

1. **De igual denominador.** En este caso es mayor la fracción que tiene mayor numerador.



2. **De distinto denominador.** En este caso se reducen las fracciones a común denominador y aplicamos el criterio anterior, tal como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo resuelto:

$\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$; como m.c.m. (5,7) = 35, tenemos $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ y $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$; de donde se deduce que $\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$ al ser mayor el numerador, y por lo tanto: $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$.

Actividad 3

Ordena de mayor a menor las fracciones:

a) $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/
Fracciones_1.htm#comparacion](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_1.htm#comparacion)

2. Operaciones con números racionales

2.1. Suma y resta de números racionales

Vamos a partir del siguiente ejemplo: Supongamos que tenemos un préstamo concedido. Hace cuatro meses anticipamos $\frac{2}{5}$ de la cantidad inicialmente prestada, y

hace un mes anticipamos $\frac{1}{5}$.

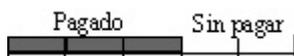
¿Qué fracción de dinero hemos anticipado?

La respuesta es $\frac{3}{5}$. La operación a realizar es una suma: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Si te fijas hemos sumado los numeradores (2 y 1) y hemos dejado sin cambiar los denominadores (5).

¿Qué fracción de dinero nos queda por pagar?

Si hemos pagado 3 de 5, nos queda por pagar 2 de 5. Una representación gráfica de esta situación podría ser:



La operación realizada es una resta. Nuestra cantidad inicial es $1 = \frac{5}{5}$. Como hemos

pagado una parte, nos queda por pagar: $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

De nuevo los numeradores se restan y los denominadores quedan como están.

¿Qué fracción obtendríamos si primero anticipáramos $\frac{2}{5}$ y luego $\frac{1}{3}$?

Módulo 1. Bloque 2. Tema 4. Los números racionales y decimales. Operaciones.
Cepa los Llanos. Albacete

De nuevo hay que sumar ambas fracciones: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$. Observa que los denominadores son distintos: 5 y 3.

Para sumar o restar números racionales, estos han de tener el mismo denominador. Por tanto, hay que transformar estas fracciones en otras equivalentes cuyo denominador sea el mismo. Realizamos los cálculos necesarios, tal y como hemos visto anteriormente:

$$\text{m.c.m.}(3,5)=15, \text{ luego } \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \text{ y } \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$
 El préstamo lo hemos fraccionado en 15 partes, de

las cuales hemos pagado 11.

Ejemplos:

$$a) \frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 3}{12} + \frac{5 \cdot 2}{12} = \frac{21}{12} + \frac{10}{12} = \frac{31}{12}$$

$$b) \frac{8}{21} - \frac{4}{12} = \frac{8 \cdot 4}{84} - \frac{4 \cdot 7}{84} = \frac{32}{84} - \frac{28}{84} = \frac{4}{84}$$

Caso particular 1. Si en una suma o resta de fracciones aparece un número entero, lo escribiremos en forma de fracción, poniéndole por denominador la unidad.

Ejemplo:

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Caso particular 2. ¿Cómo realizarías una suma o resta de fracciones si aparece un signo negativo en el denominador de algunas de las fracciones?

Teniendo en cuenta que: $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$; y que esto ocurre en general para cualquier

fracción ($\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$), y como el signo negativo en el denominador nos puede

complicar mucho a la hora de poner el mismo denominador. Por tanto conviene sustituir esa fracción por otra equivalente, pero con el signo negativo en el numerador.

Ejemplo: Para realizar la siguiente suma, actuaremos como sigue:

$$\frac{3}{4} + \frac{-2}{7} = \frac{3}{4} + \frac{-2}{7} = \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \text{ y a continuación se calcula como}$$

Actividad 4

Calcula:

a) $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

Para saber más: Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_2.htm

2.2. Multiplicación de números racionales

Gasto al mes $\frac{3}{4}$ de mi sueldo. La mitad de estos gastos corresponde al pago de la hipoteca. ¿Qué fracción de mi sueldo corresponde al pago de la hipoteca?

Tendremos que calcular la mitad de tres cuartos (fracción como operador):



Como vemos en la imagen, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

Para multiplicar números racionales se halla un nuevo número racional cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

En general: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
 a · c ♣ numerador : producto de los numeradores
 b · d ♡ denominador : producto de denominadores

Ejemplo:

$$a) \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$$

$$b) \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{30}{126}$$

$$c) \frac{-3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-15}{4}$$

Caso particular. Para multiplicar un número entero por un número racional, multiplicaremos el entero por el numerador del número racional y dejaremos el denominador como está.

En realidad escribimos el número entero en forma de fracción, con denominador 1 y realizamos la multiplicación:

$$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5}$$

Ejercicio Resuelto:

$$a) 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$b) 5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$$

$$c) -5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{-15}{8}$$

A veces es conveniente simplificar antes de realizar la multiplicación.

Ejercicio Resuelto:

Si queremos realizar la siguiente multiplicación $\frac{24 \cdot 45}{81 \cdot 16}$ será conveniente

descomponer en factores los números que aparecen en el numerador y denominador:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3; \quad 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\frac{24 \cdot 45}{81 \cdot 16} = \frac{24 \cdot 45}{81 \cdot 16} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5)}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}$$

Ahora podemos tachar los factores que están repetidos en el numerador y el denominador:

$$\frac{\cancel{2} \cancel{2} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cancel{3} \cancel{3} \cancel{3} \cancel{2} \cancel{2} \cancel{2}} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

Actividad 5

Realiza las siguientes multiplicaciones:

- a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$
- b) $8 \cdot \frac{3}{5}$
- c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$
- d) $2 \cdot \frac{-3}{8}$

2.2.1. Números inversos

Dada una fracción $\frac{a}{b}$, decimos que la fracción $\frac{b}{a}$ es su fracción inversa porque al multiplicarlas se obtiene la unidad: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$. Por ello, para escribir el inverso de una fracción se cambia el numerador por el denominador y viceversa.

Ejemplos:

El inverso de $\frac{3}{8}$ es $\frac{8}{3}$

El inverso de 5 es $\frac{1}{5}$

2.3. División de números racionales

Al **dividir dos números racionales** obtendremos otro número racional cuyo numerador será la multiplicación del numerador de la primera por el denominador de la segunda y cuyo denominador será la multiplicación del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Observa que es como si se multiplicara en cruz.

En general:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ numerador: producto de numerador de la 1ª por denominador de la 2ª

denominador: producto de denominador de la 1ª por numerador de la 2ª

Ejemplos:

$$a) \frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10} \quad b) \frac{2}{3} : \frac{5}{6} : \frac{1}{7} = \frac{12}{15} : \frac{1}{7} = \frac{84}{15} \quad c) \frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9} : \frac{5}{1} = \frac{4}{45} \quad d) \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{6}{10}$$

En alguna ocasión puede darse el caso que nos encontremos divisiones expresadas

de esta forma: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} =$

**Módulo 1. Bloque 2. Tema 4. Los números racionales y decimales. Operaciones.
Cepa los Llanos. Albacete**

Si colocamos la división de otra forma, tendremos: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$.

Pero para evitar tener que recolocar estas expresiones, vamos a ver cómo se resuelven. Cuando tengamos expresiones de este tipo $\frac{3}{4}$, el resultado será otra fracción, cuyo numerador será el producto de los términos extremos (3.5) y cuyo denominador será el producto de los términos del medio (4.2); es decir $\frac{3}{4} = \frac{3.5}{4.2} = \frac{15}{8}$

Actividad 6

Realiza las siguientes divisiones:

- a) $\frac{-1}{2} : \frac{3}{4}$
- b) $8 : \frac{3}{5}$
- c) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$
- d) $2 : \frac{-3}{8}$

Respuestas

Para saber más: Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_3.htm#multiplicacion

Repaso de operaciones con fracciones:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/operaciones_fracciones_ngdlf/Unidad.htm

2.4. Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones

Para realizar operaciones combinadas hay que seguir la misma jerarquía que se ha usado con los números naturales y enteros.

El procedimiento sería el siguiente: Primero resolvemos los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha y por último las sumas y restas en el orden en que estén escritas. La fracción que resulte se simplificará siempre que sea posible.

3. Los números decimales

3.1. Introducción

En nuestra vida cotidiana estamos rodeados de números decimales por todas partes. Habrás oído las siguientes expresiones:

- Tienes unas **décimas** de fiebre.
- Quiero un **décimo** de lotería para el próximo sorteo de lotería.
- He ganado por dos **décimas** de segundo.
- La gasolina ha subido cuatro **décimas** este último mes.

Las fracciones que tienen por denominador la unidad seguida de ceros se llaman **fracciones decimales**.

Si el denominador es diez, la fracción se lee nombrando el numerador seguido de la palabra décimos o décimas.

Ejemplo: $\frac{3}{10}$ se lee: tres décimos.

Si el denominador es cien, la fracción se lee nombrando el numerador seguido de la palabra centésimos o centésimas.

Ejemplo: $\frac{7}{100}$ se lee: siete centésimas.

3.2. Expresión decimal de los números racionales

3.2.1. ¿Cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal?

Se escribe sólo el numerador y se separan con una coma, a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

Ejemplos: $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{43}{10} = 4,3$; $\frac{371}{1000} = 0,371$

La coma se puede colocar abajo o arriba; es decir, la podrás ver así 5,6 y así 5'6.

Los números obtenidos tienen una **parte entera** y otra **parte decimal** y se llaman **números decimales**. La parte entera está a la izquierda de la coma y la parte decimal, a la derecha.

Ahora podemos completar el cuadro de unidades que vimos en la primera unidad:

PARTE ENTERA			PARTE DECIMAL					
CENTENA	DECENA	UNIDAD	DÉCIMA	CENTÉSIMA	MILÉSIMA	DIEZMILÉSIMA	CIENMILÉSIMA	MILLONÉSIMA

Cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden inmediatamente superior. Por tanto, una unidad serán 10 décimas; 1 décima son 10 centésimas, y así sucesivamente.

Para leer un número decimal se dice primero la parte entera, seguida de la palabra “unidades” o “enteros” y después se lee la parte decimal acabando con el nombre del lugar que corresponde a la última cifra decimal.

28,64 \Rightarrow veintiocho unidades y sesenta y cuatro centésimas

0,045 \Rightarrow cuarenta y cinco milésimas.

0,0436 \Rightarrow cuatrocientas treinta y seis diezmilésimas.

Si quieres escribir cualquier número decimal, por ejemplo 58 milésimas, tienes que

colocar el 8 en el lugar de las milésimas. Por lo tanto el 5 estará en el lugar de las centésimas. Deberás colocar 0 en el lugar de las décimas y otro 0 en el de las unidades. Es decir, quedará así: 0,058.

Si añadimos ceros a la derecha de un número decimal su valor no varía.

Por tanto, $3,45 = 3,450 = 3,45000$

3.2.2. ¿Cómo se escribe una fracción ordinaria en forma de número decimal?

Ya hemos visto cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal. Ahora vamos a ver cómo expresar una fracción cualquiera, por ejemplo $\frac{9}{4}$, en forma de número decimal. Para ello dividimos el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 4 \\ 1 \quad | \quad 2 \end{array}$$

Como la división no es exacta, ponemos una coma en el cociente y añadimos un cero al resto y continuamos dividiendo:

$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 4 \\ 10 \quad | \quad 2,2 \\ 2 \end{array}$$

y continuamos dividiendo añadiendo otro cero al resto:

$$\begin{array}{r} 9 \quad | \quad 4 \\ 10 \quad | \quad 2,25 \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

Como el resto es 0 ya no continuamos la división

Puede ocurrir que el 0 en el resto no lo obtengamos tan pronto o no queramos sacar muchos decimales. Entonces nos pueden pedir que aproximemos el resultado hasta un orden; por ejemplo, hasta las milésimas, en el caso de que queramos tres decimales; hasta las décimas, en el caso de que nos pidan dos decimales, y así sucesivamente.

Para escribir una fracción en forma decimal se divide el numerador entre el denominador. Si la división no es exacta, se pone una coma en el cociente y se van añadiendo ceros al resto.

3.2.3. Números decimales periódicos

Puede ocurrir que al escribir una fracción en forma decimal no se obtenga nunca resto cero en la división, es decir, no se obtenga un decimal exacto. Esto por ejemplo ocurre al calcular el número decimal que corresponde a la fracción $\frac{40}{33}$.

$$\begin{array}{r} 40 \quad | \quad 33 \\ 70 \quad | \quad 1'2121..... \\ 40 \quad | \\ 70 \quad | \\ 40 \quad | \\ \vdots \end{array}$$

El cociente es 1,212121..., un número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten indefinidamente. A estos números se les llama **decimales periódicos** y a la cifra o conjunto de cifras que se repiten se les llama **período**.

Este número se puede expresar así: $1,2\overline{1}$

El arco encima del 21 indica que está cifra se repite de forma indefinida.

Cuando en un número decimal el período empieza justo detrás de la coma, se dice que el decimal es **periódico puro**.

Hay números en los que el período empieza justo detrás de la coma y otros en los que hay alguna cifra entre la coma y el período. Por ejemplo, vamos a calcular el número decimal que corresponde a $\frac{23}{12}$

$$\begin{array}{r} 23 \quad | \quad 12 \\ 110 \quad | \quad 1'91666... \\ 020 \quad | \\ 080 \quad | \\ 080 \quad | \\ \vdots \end{array}$$

Es decir, expresado como número periódico sería $1,9\overline{16}$

Si entre la coma y el período hay una o varias cifras decimales, el decimal se llama **periódico mixto**. A las cifras que hay entre la coma y el período se les llama **anteperíodo**.

Actividad 7

1. Escribe cómo se leen estos números:

- a) 3,82 b) 5,1 c) 4,356 d) 0,03

2. Escribe estas fracciones en forma de número decimal:

- a) $\frac{53}{100}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{8}{30}$ d) $\frac{82}{11}$ e) $\frac{56}{35}$

Para saber más: Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/
Fracciones_4.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_4.htm)

3.3. Cálculo de fracciones generatrices

3.3.1. Decimales exactos

Un número decimal se puede escribir en forma de fracción. A dicha fracción se le llama **fracción generatriz**.

La fracción generatriz de un decimal exacto es una fracción que tiene por numerador el número sin coma, y por denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

Ejemplos: $4,3 = \frac{43}{10}$; $0,58 = \frac{58}{100}$; $3,745 = \frac{3745}{1000}$

3.3.2. Decimales periódicos puros

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma y periodo, menos el número formado por las cifras anteriores a la coma. Por denominador tiene tantos nueves como cifras hay en el periodo.

$$\text{Ejemplos: } 3,\widehat{16} = \frac{316 - 3}{99} = \frac{313}{99};$$

$$0,\widehat{2345} = \frac{2345 - 0}{9999} = \frac{2345}{9999}$$

Los decimales periódicos mixtos lógicamente también se pueden escribir en forma de fracción, pero el proceso es más complicado y no corresponde a este nivel.

Actividad 8

Escribe las fracciones generatrices de estos números decimales:

- a) 5,1 b) 0,002 c) 0,555... d) 2,353535...

4. Operaciones con números decimales

4.1. Suma y resta de números decimales

Para sumar o restar dos números decimales se colocan uno debajo del otro de forma que las comas coincidan. Si uno de ellos tiene menos cifras decimales que el otro, se añaden ceros a la derecha. Se realiza la suma o la resta, y se coloca la coma en la columna de las comas.

Ejemplo: Vamos a sumar $3,06 + 4,8 + 6,125$

$$\begin{array}{r} 3,060 + \\ 4,800 + \\ \hline 6,125 = \\ 13,985 \end{array}$$

Ejemplo: Vamos a restar $8,6 - 3,25$

$$\begin{array}{r} 8,60 - \\ 3,25 = \\ \hline 5,35 \end{array}$$

Actividad 9

Realiza las siguientes operaciones:

a) $57,28 + 35,2 + 4,257$

b) $15,75 - 3,251$

c) $9,35 + 35,1 - 3,2$

4.2. Multiplicación de números decimales

4.2.1. Multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tiene la unidad. Si no hay suficientes lugares, se añaden ceros a la derecha del número.

Ejemplos:

$0,32 \times 10 = 3,2;$

$3,68 \times 100 = 368;$

$2,6 \times 1000 = 2600$

4.2.2. Multiplicación de dos números decimales

Para multiplicar dos números decimales se hace la multiplicación como si fueran números naturales y en el producto se coloca la coma dejando a la derecha tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

Ejemplo: Vamos a multiplicar $142,3 \times 0,35$

1 4 2, 3	×		→	Un decimal
0, 3 5	=	7 1 1 5	→	Dos decimales
4 2 6 9		4 9, 8 0 5	→	Tres decimales
4 9, 8 0 5				

Actividad 10

1. Hemos comprado 32,5 l de leche a 0,92 € el litro. ¿Cuánto hemos pagado?

2. Realiza:

a) $0,024 \cdot 100$

b) $5,9 \cdot 1000$

c) $0,023 \cdot 10000$

4.3. División de números decimales

4.3.1. División de un número decimal por la unidad seguida de ceros

Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tiene la unidad. Si faltan lugares, se rellenan con ceros.

Ejemplos:

$$36 : 10 = 3,6;$$

$$27 : 1000 = 0,027;$$

$$4,5 : 1000 = 0,0045$$

Módulo 1. Bloque 2. Tema 4. Los números racionales y decimales. Operaciones.
Cepa los Llanos. Albacete

3, 5 2 8 $\overline{) 28,4}$

3 5, 2 8 $\overline{) 284}$

Desplazamos la coma del dividendo un lugar a la derecha, que es la cifra que hemos quitado en el divisor.

Quitamos la coma del divisor.

En este otro caso no tenemos bastantes cifras en el dividendo, por lo que deberemos añadir algún cero:

4 5, 2 $\overline{) 0,64}$

4 5 2 0 $\overline{) 64}$

Desplazamos la coma del dividendo dos lugares a la derecha. Como falta un lugar, añadimos un cero.

Quitamos la coma del divisor.

A continuación se realizarían las divisiones como ya sabemos.

Pero vamos a comenzar la primera de las divisiones por tratarse de un ejemplo singular.

$$3 \ 5, \ 2 \ 8 \ \overline{) 2 \ 8 \ 4}$$

0,

Al intentar dividir 35 unidades entre 284, no podemos. Por tanto ponemos 0 en el cociente y bajamos la cifra siguiente. Pero como la cifra siguiente es la primera cifra decimal, ponemos una coma en el cociente, después del 0.

$$3 \ 5, \ 2 \ 8 \ \overline{) 2 \ 8 \ 4}$$

0 6 8 0, 1

Ahora ya debemos dividir 352 entre 284. Obtenemos 1 en el cociente y 68 en el resto.

Bajamos la siguiente cifra decimal: el 8

Obtenemos 2 en el resto y de resto 120.

$$3 \ 5, \ 2 \ 8 \ \overline{) 2 \ 8 \ 4}$$

Al no haber más cifras, hemos terminado la división.

$$0 \ 6 \ 8 \ 8 \ 0, \ 1 \ 2$$

1 \ 2 \ 0

Recuerda que **aquí también se mantiene la priorización de operaciones** que hemos visto en apartados anteriores. Por tanto, en caso de que en una operación haya paréntesis, multiplicaciones, divisiones, sumas y restas, se empiezan resolviendo los paréntesis, a continuación las multiplicaciones y divisiones y finalmente las sumas y restas.

Actividad 11

1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $369 : 1000 =$ b) $3669 : 100 =$

c) $363 : 100 =$ d) $3,6 : 1000 =$

**2. El tío de Andrés quiere repartir 14,52 euros entre sus tres sobrinos.
¿Cuánto dará a cada uno?**

**3. Hemos comprado varios litros de leche pagando por la compra 20,4 euros.
Si cada litro cuesta 0,85 €, ¿cuántos litros hemos comprado?**

Se proponen a continuación una serie de direcciones para saber más sobre fracciones y números decimales:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/fracciones/index.htm

Tema general de las fracciones:

<http://www.aplicaciones.info/decimales/fra01.htm>

Repaso de operaciones con fracciones:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/operaciones_fracciones_ngdlf/Unidad.htm

Sobre los números decimales:

http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/9/Usr/eltanque/todo_mate/numdec/numdecim_p.html

<http://www.aplicaciones.info/decimales/decima.htm>

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/materiales/3eso/numeros/decimales/numerosdecimales.htm>

http://www.profesorenlinea.cl/swf/links/frame_top.php?dest=http%3A//www.profesorenlinea.cl/matematica/Decimales.htm

Sobre las fracciones y los decimales:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/index.htm

5. Respuestas de las actividades

Respuestas actividad 1

$$\text{a) } \frac{12}{5}; \text{ b) } \frac{5}{7}; \text{ c) } \frac{-9}{25}; \text{ d) } \frac{3}{4}$$

Respuestas actividad 2

Actividad 1.

a) 60; b) 1500; c) 1800; d) 1080

Actividad 2.

168 mujeres; 120 hombres

Respuestas actividad 3

$$\text{a) } \frac{3}{4} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8} \qquad \text{b) } \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10}$$

Respuestas actividad 4

$$\text{a) } \frac{3}{7} \quad \text{b) } \frac{11}{12} \quad \text{c) } \frac{61}{40} \quad \text{d) } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Respuestas actividad 5

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{24}{5}$ c) $\frac{10}{21}$ d) $\frac{-3}{4}$

Respuestas actividad 6

a) $\frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ b) $\frac{40}{3}$ c) $\frac{14}{15}$ d) $\frac{16}{3}$

Respuestas actividad 7

Actividad 1.

- a) Tres unidades, ochenta y dos centésimas
- b) Cinco unidades, una décima
- c) Cuatro unidades, trescientas cincuenta y seis milésimas
- d) Tres centésimas

Actividad 2.

- a) 0,53 b) 0,4 c) 0,26 d) $7,\widehat{45}$ e) 1,6

Respuestas actividad 8

a) $\frac{51}{10}$ b) $\frac{2}{1000}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{233}{99}$

6.2 Respuestas actividad 9

- a) 96,957 b) 12,499 c) 41,25

Respuestas actividad 10

Actividad 1.

$$32,5 \cdot 0,94 = 30,55 \text{ €}$$

Actividad 2.

a) 2,4

b) 5900

c) 230

Respuestas actividad 11

Actividad 1.

a) 0,369

b) 36,69

c) 3,63

d) 0,0036

Actividad 2.

4,84 €

Actividad 3.

24 litros