

Bloque 1. Tema 1

Números naturales y enteros

ÍNDICE

1. Estudio de los números naturales
 - 1.1. Concepto de número natural
 - 1.2. El sistema de numeración decimal
 - 1.2.1. Comparación de números naturales
 - 1.3. Suma de números naturales
 - 1.3.1. Propiedades de la suma
 - 1.4. Resta de números naturales
 - 1.5. Uso de la calculadora para realizar sumas y restas de números naturales
 - 1.6. Multiplicación de números naturales
 - 1.6.1. Propiedades de la multiplicación
 - 1.6.2. Casos particulares de la multiplicación
 - 1.7. División de números naturales
 - 1.7.1. Cociente por defecto y por exceso
 - 1.7.2. ¿Cómo se realiza una división?
 - 1.7.3. División por la unidad seguida de ceros
 - 1.8. Prioridad de las operaciones
 - 1.9. Utilización del ordenador para realizar diferentes operaciones
2. Números enteros.
 - 2.1 Concepto
 - 2.2 Representación de los enteros en la recta numérica
 - 2.3 Valor absoluto de un número entero
 - 2.4 Comparación y ordenación de números enteros
 - 2.5 Opuesto de un número entero
3. Operaciones con números enteros
 - 3.1 Suma de números enteros
 - 2.1. Resta de números enteros
 - 2.2. Multiplicación de números enteros
 - 2.3. División de números enteros
4. Solución de actividades.

Presentación

¿Te has parado a pensar cuántas veces ves o utilizas los números a lo largo del día? Si lo piensas, seguro que son muchas más de las que te imaginas: cuando miras la hora en tu reloj, cuando telefoneas a un amigo o un familiar, cuando miras el escaparate de cualquier tienda, cuando recibes una factura... y seguro que muchas más. Por eso, es fundamental controlar este primer tema, porque es fundamental en nuestro día a día.

1. Estudio de los números naturales

1.1. Concepto de número natural

En nuestra vida diaria estamos rodeados de números por todas partes. ¿Cuántos años tienes? ¿Cuánto cuesta un libro? ¿A qué velocidad va tu coche?...

Estos números los utilizamos para contar (uno, dos, tres,...), y se llaman **números naturales**. Reciben este nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos.

También podemos utilizar los números para otras funciones:

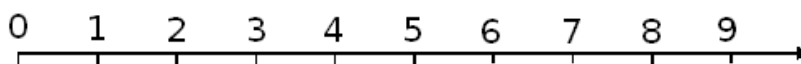
- Para identificar: el número del DNI, el número de teléfono, el número de la casa donde vives,...
- Para ordenar: primero (1°), cuarto (4°),...

Existe un número natural algo especial. Veámoslo con un ejemplo:

Asómate a la puerta de tu casa. ¿Cuántos “osos azules hay paseando por la calle”? Seguro que ninguno, o de lo contrario, me parece que hay que visitar al oftalmólogo. El número en cuestión es el **0 (cero)**, y se utiliza cuando no hay nada que contar.

El conjunto de todos los naturales lo simbolizaremos con una “ene” mayúscula, **N**, y son los que sirven para contar y *ordenar*:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 64, 65, 66, \dots, 1639, 1640, 1641, 1642, \dots\}$$



1.2. El sistema de numeración decimal

El sistema de numeración que utilizamos actualmente es el sistema de numeración decimal, que fue introducido en Europa por los árabes, en el siglo XI, procedente de la India, donde se desarrolló desde el siglo VI a.C.

¿Por qué se llama sistema decimal? Quizá la respuesta esté en nuestras manos, porque tenemos diez dedos y todos hemos usado alguna vez los dedos para contar. Seguramente por eso nuestro sistema utiliza 10 símbolos que son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Cuando tenemos diez unidades, las agrupamos formando un grupo superior llamado **decena**.

Cuando tenemos diez decenas, formamos un nuevo grupo llamado **centena** que, por lo tanto, equivale a cien unidades.

Y así sucesivamente: cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden inmediato superior. En el siguiente cuadro figuran las clases, órdenes y unidades:

BILLONES			MILES DE MILLONES			MILLONES			MILLARES			UNIDADES			CLASE
15 ⁰	14 ⁰	13 ⁰	12 ⁰	11 ⁰	10 ⁰		8 ⁰	7 ⁰	6 ⁰	5 ⁰	4 ⁰	3 ⁰	2 ⁰		ORDEN
CENTENA BILLÓN	DECENA BILLÓN	UNIDAD BILLÓN	CENTENA MILLAR	DECENA MILLAR	UNIDAD MILLAR	CENTENA MILLÓN	DECENA MILLÓN	UNIDAD MILLÓN	CENTENA MILLAR	DECENA MILLAR	UNIDAD MILLAR	CENTENA MILLAR	DECENA MILLAR		

El número 4.368 está formado por 4 unidades de millar, 3 centenas, 6 decenas y ocho unidades. Lo podemos observar mejor si los colocamos en la tabla:

MILLARES			UNIDADES		
6 ⁰	5 ⁰	4 ⁰	3 ⁰	2 ⁰	1 ⁰
CENTENA MILLAR	DECENA MILLAR	UNIDAD MILLAR	CENTENA	DECENA	UNIDAD
		4	3	6	8

Para leer un número se separan en grupos de tres cifras y se van leyendo por clases.

Ejemplo: Para leer el número 49807621, lo dividimos en grupos de tres. Así: 49.807.621 y empezamos a leer por la izquierda. Cuando llegamos a un punto, nombramos su clase. Sería así: Cuarenta y nueve millones, ochocientos siete mil seiscientos veintiuno.

Se puede ver mejor si lo colocamos en la tabla anterior:

MILLONES			MILLARES			UNIDADES		
9 ^o	8 ^o	7 ^o	6 ^o	5 ^o	4 ^o	3 ^o	2 ^o	1 ^o
CENTENA MILLÓN	DECENA MILLÓN	UNIDAD MILLÓN	CENTENA MILLAR	DECENA MILLAR	UNIDAD MILLAR	CENTENA	DECENA	UNIDAD
	4	9	8	0	7	6	2	1

Actividad 1

Actividad 1. Escribe cómo se leen los siguientes números:

- a) 435.207.756
- b) 16.503.203
- c) 335.698
- d) 200.014

Actividad 2. Escribe con números:

- a) Dos mil ocho.
- b) Seiscientos mil cuatrocientos treinta y dos.
- c) Diez mil cinco.
- d) Doce millones, trescientos quince mil doscientos uno.
- e) Ciento diez millones, doscientos mil nueve.
- f) Trescientos cinco mil veintidós

1.2.1. Comparación de números naturales

Si dos números tienen el mismo número de cifras, habrá que ir comparando éstas de izquierda a derecha. El que tiene mayor la primera cifra de la izquierda es el mayor. En caso de que sean iguales, se compara la segunda y así sucesivamente.

Por ejemplo, si tenemos 4.692 y 4.685, vemos que los dos tienen 4 unidades de millar, que los dos tienen 6 centenas, pero el primero tiene 9 decenas y el segundo 8 decenas. Por tanto, será mayor 4.692.

En primer lugar, si un número tiene más cifras que otro, éste será mayor, además, para expresar matemáticamente que un número es mayor que otro, se emplea el símbolo $>$. Veamos algunos ejemplos:

a) 2.567 es mayor que 384 se escribe así: $2.567 > 384$

b) 4.685 es menor que 4.692 se escribe así: $4.685 < 4.692$

Para expresar matemáticamente que un número es mayor que otro, se emplea el símbolo $>$. Y para expresar que un número es menor que otro, se emplea $<$. De esta forma, podemos decir:

$$384 < 2.567$$

$$4.692 > 4.685$$

Observa que la punta de la flecha señala siempre al número menor y la abertura del símbolo señala al número mayor.

Actividad 2

Actividad 1. Completa con los signos $>$, $<$:

a) 5605 ... 5506

b) 646 ... 664

c) 5010 ... 5001

d) 6304 ... 6403

Actividad 2. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

a) 56.505

b) 78.549

c) 45.693

d) 54.956

1.3. Suma de números naturales

Sumar es agrupar varias cantidades en una sola. Esta operación también se llama adición.

Seguro que en tu vida has hecho muchísimas sumas: cuando calculas lo que te has gastado el fin de semana, cuando calculas los kilómetros que debes recorrer para llegar a un determinado lugar,...

Vamos a ver cómo se realiza la suma:

$$6.578 + 4.087 + 792$$

<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">u.m.</th> <th style="text-align: center;">c.</th> <th style="text-align: center;">d.</th> <th style="text-align: center;">u.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td></td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> </tbody> </table>	u.m.	c.	d.	u.	6	5	7	8	4	0	8	7		7	9	2	<p>Primero colocamos los números en columna de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas...</p>										
u.m.	c.	d.	u.																								
6	5	7	8																								
4	0	8	7																								
	7	9	2																								
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			1			6	5	7	8		4	0	8	7				7	9	2				7		<p>Empezamos sumando las unidades: $8 + 7 + 2 = 17$, es decir 1 decena y 7 unidades Escribimos el 7 debajo de las unidades y ponemos el 1 en la columna de las decenas.</p>	<p>En la práctica decimos: $8 + 7 + 2$ son 17. <i>Escribo el 7 y me llevo 1</i></p>
		1																									
6	5	7	8																								
4	0	8	7																								
		7	9	2																							
			7																								
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td></td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		2	1			6	5	7	8		4	0	8	7				7	9	2		5	7			<p>A continuación sumamos las decenas: $1 + 7 + 8 + 9 = 25$, es decir 2 centena y 5 decenas. Escribimos el 5 debajo de las decenas y el 2 en la columna de las centenas.</p>	<p>Decimos: $1 + 7 + 8 + 9$ son 25. <i>Escribo 5 y me llevo 2</i></p>
	2	1																									
6	5	7	8																								
4	0	8	7																								
		7	9	2																							
	5	7																									

$ \begin{array}{r} 1\ 2\ 1 \\ 6\ 5\ 7\ 8 \\ 4\ 0\ 8\ 7 \\ 7\ 9\ 2 \\ \hline 4\ 5\ 7 \end{array} $	<p>Al sumar las centenas obtenemos:</p> <p>$2 + 5 + 0 + 7 = 14$ centenas, que son una unidad de millar y 4 centenas.</p> <p>Escribimos el 4 debajo de las centenas y el 1 en la columna de las unidades de millar</p>	<p>En la práctica decimos: $2 + 5 + 0 + 7$ son 14. <i>Escribo 4 y me llevo 1</i></p>
--	--	---

$ \begin{array}{r} 1\ 2\ 1 \\ 6\ 5\ 7\ 8 \\ 4\ 0\ 8\ 7 \\ 7\ 9\ 2 \\ \hline 1\ 1\ 4\ 5\ 7 \end{array} $	<p>Sumamos las unidades de millar:</p> <p>$1 + 6 + 4 = 11$, es decir una decena de millar y una unidad de millar.</p> <p>Escribimos el 1 debajo de las unidades de millar y el otro 1 en el lugar de las decenas de millar, puesto que ya no hay más columnas que sumar.</p>	<p>Decimos: $1 + 6 + 4$ son 11. Escribo el 11 y hemos terminado.</p>
--	---	---

Los números que sumamos en una suma se llaman **sumandos**. En el ejemplo anterior había tres sumandos, el 6.578, el 4.087 y el 792. Al resultado de la operación se le llama **suma**.

Para indicar esta operación utilizamos el signo "+" que se lee "más".

Actividad 3

Actividad. Realiza las siguientes sumas:

- a) $6570 + 167 + 8658 =$
- b) $563132 + 54006 + 66707 =$
- c) $4657 + 506 + 568 + 70 =$

1.3.1. Propiedades de la suma

a) Propiedad conmutativa:

El orden de los sumandos no altera la suma: $a + b = b + a$

En la práctica da lo mismo sumar $4 + 6$ que $6 + 4$, puesto que obtenemos el mismo resultado, que es 10.

b) Propiedad asociativa:

Si tenemos que sumar tres o más sumandos, podemos sumar dos cualquiera de ellos y sustituirlos por el resultado de su suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Esto nos permite simplificar algunos cálculos. Por ejemplo, si tenemos que sumar $37 + 30 + 20$, es mejor sumar $30 + 20 = 50$ y después sumarle el 37; es decir:

$$37 + (30 + 20) = 37 + 50 = 87$$

También podemos combinar ambas propiedades. Por ejemplo, si tenemos que sumar $20 + 43 + 50$, lo más fácil es aplicar la propiedad conmutativa para cambiar el orden, así: $20 + 50 + 43$ y luego utilizar la propiedad asociativa para sumar $20 + 50 = 70$. Después sumar $70 + 43 = 113$.

1.4. Resta de números naturales

Restar es quitar una cantidad a otra. Es la operación inversa a la suma. Esta operación también recibe el nombre de **sustracción**. Para indicar esta operación se utiliza el signo menos (-).

En tu vida diaria también realizas muchas restas. Por ejemplo, si te compras algo que vale 14 euros y pagas con un billete de 20 euros, has de realizar una resta para saber lo que te deben devolver. Es decir, $20 - 14 = 6$ euros.

Los términos de la resta son:

a	-	b	=	c
minuendo		sustraendo		diferencia

En la resta de números naturales, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo.

CÓMO COMPROBAR QUE UNA RESTA ESTÁ BIEN HECHA

Operación: $97 - 50 = 47$
 Comprobación: $50 + 47 = 97$

Vamos a ver cómo se realiza la resta:

958 – 671

<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">c.</td><td style="padding: 0 5px;">d.</td><td style="padding: 0 5px;">u.</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">9</td><td style="padding: 0 5px;">5</td><td style="padding: 0 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">6</td><td style="padding: 0 5px;">7</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> </table>	c.	d.	u.	9	5	8	6	7	1	<p>Primero colocamos el minuendo y el sustraendo en columna de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas...</p>	En la práctica:
c.	d.	u.									
9	5	8									
6	7	1									
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">9</td><td style="padding: 0 5px;">5</td><td style="padding: 0 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">6</td><td style="padding: 0 5px;">7</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="padding: 0 5px;">7</td></tr> </table>	9	5	8	6	7	1			7	<p>Comenzamos restando las unidades: a 8 unidades le quitamos 1 unidad y nos quedan 7 unidades</p> <p>Continuamos con las decenas: a 5 decenas no le podemos quitar 7 decenas</p>	<i>De 1 a 8 van 7. Colocamos el 7 debajo de las unidades.</i>
9	5	8									
6	7	1									
		7									
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">8</td><td style="padding: 0 5px;">¹5</td><td style="padding: 0 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">6</td><td style="padding: 0 5px;">7</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 0 5px;">8</td><td style="padding: 0 5px;">7</td></tr> </table>	8	¹ 5	8	6	7	1		8	7	<p>Tomamos una centena y la transformamos en 10 decenas, con lo que tenemos 15 decenas.</p> <p>A 15 decenas le quitamos 7 decenas y nos quedan 8 decenas.</p>	Mentalmente se pone un 1 delante del 5. <i>Del 7 al 15 van 8 y me llevo 1.</i> Colocamos el 8 debajo de las decenas.
8	¹ 5	8									
6	7	1									
	8	7									
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">8</td><td style="padding: 0 5px;">¹5</td><td style="padding: 0 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">6</td><td style="padding: 0 5px;">7</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">2</td><td style="padding: 0 5px;">8</td><td style="padding: 0 5px;">7</td></tr> </table>	8	¹ 5	8	6	7	1	2	8	7	<p>Ahora sólo nos quedan 8 centenas (pues hemos quitado antes una) y al restarle 6, nos quedan 2.</p>	
8	¹ 5	8									
6	7	1									
2	8	7									
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">9</td><td style="padding: 0 5px;">¹5</td><td style="padding: 0 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">6⁺¹</td><td style="padding: 0 5px;">7</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">2</td><td style="padding: 0 5px;">8</td><td style="padding: 0 5px;">7</td></tr> </table>	9	¹ 5	8	6 ⁺¹	7	1	2	8	7		En vez de quitar una centena al 9, se la sumamos al 6. Por tanto, dejamos las 9 centenas como estaban al principio. <i>Decimos: 6 y 1 que nos llevamos son 7. De 7 a 9 van 2.</i>
9	¹ 5	8									
6 ⁺¹	7	1									
2	8	7									

Actividad 4

Actividad 1. Realiza las siguientes restas:

a) $528 - 324 =$

b) $11929 - 8974 =$

Actividad 2. Calcula el término de la resta que falta en cada caso:

a) $935670 - \dots\dots\dots = 513265$

b) $\dots\dots\dots - 543271 = 895023$

c) $456799 - 375832 = \dots\dots\dots$

1.5. Uso de la calculadora para realizar sumas y restas de números naturales

La calculadora nos facilita la realización de los cálculos.




Para hacer sumas y restas con la calculadora disponemos de las teclas  y .

Al teclear un número de más de tres cifras, no pongas nunca el punto después de las unidades de millar, pues la calculadora lo entiende como decimal.

Por ejemplo, para hacer la resta $458 - 379$, has de dar a las teclas:



Si tienes calculadora, realiza algunas sumas y restas para practicar.

Puede suceder que quieras sumas varias veces el mismo número. Para no tener que estar tecleándolo cada vez, hay una tecla que introduce el número en la memoria: M+ 

Por ejemplo: Tienes una cuenta en el banco con 23.456 euros y cada mes te ingresan 458 euros. Quieres saber cómo irá aumentando la cuenta a lo largo de 4 meses.

Es evidente que a 23.456 le tienes que ir sumando 458 cada mes.

Para hacer los cálculos con la calculadora, tecleas el número 458 y luego la tecla



. El número queda introducido en la memoria, aunque borres la pantalla.

Cada vez que quieras que aparezca este número, das a la tecla de Memoria

recuperadora:

Ahora, para saber el dinero que tendrás cada mes, dejas la pantalla en 0 y tecleas lo siguiente:

23456 y obtendrás 23914, que es la cantidad que tendrás el primer mes.

Cada vez que des a las teclas irás obteniendo lo de los siguientes meses.

Para borrar el número de la memoria pulsas en la tecla

1.6. Multiplicación de números naturales



Existen numerosas situaciones de la vida cotidiana en las que utilizas la multiplicación.

Por ejemplo, si vamos a pagar 5 barras de pan y cada una cuesta 80 céntimos, podemos sumar 4 veces 80, es decir: $80 + 80 + 80 + 80$. Pero lo mejor será multiplicar 4×80 .

Por tanto, cuando se trata de hacer una suma con el mismo sumando, lo mejor es que lo hagamos con la **multiplicación**.

El sumando que se repite, en este caso el 80, se llama **multiplicando**. Las veces

que se repite el sumando, en este caso 4, se llama **multiplicador**. El multiplicando y el multiplicador también se llaman **factores**. El resultado se llama **producto**. El signo de esta operación es **x** o **.** y se lee "por".

En la calculadora la tecla que usamos para hacer las multiplicaciones es . En el ordenador la tecla que se usa es .

Vamos a ver cómo se realiza la multiplicación:

$$326 \cdot 45$$

$\begin{array}{r} \text{c.} \quad \text{d.} \quad \text{u.} \\ \hline 3 \quad 2 \quad 6 \\ \times \quad 4 \quad 5 \end{array}$	
$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 6 \\ \times \quad 5 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \end{array}$	Primero multiplicamos 326 por 5
$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 6 \\ \times \quad 4 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \\ 1 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \end{array}$	Luego multiplicamos 326 por 4 y colocamos el resultado debajo de las decenas.
$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 6 \\ \times \quad 4 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 3 \quad 0 \\ 1 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 8 \quad 7 \quad 0 \end{array}$	Por último, sumamos los resultados obtenidos.

Para realizar esta operación con la calculadora, teclearemos:



1.6.1. Propiedades de la multiplicación

a) Propiedad conmutativa:

El orden de los factores no altera el producto: $a \cdot b = b \cdot a$

Es decir; da lo mismo multiplicar $3 \cdot 4$, que $4 \cdot 3$, pues el resultado da 12 en ambos casos.

b) Propiedad asociativa:

Para multiplicar dos o más factores se pueden asociar dos de ellos y el resultado no varía: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Si tienes que multiplicar un producto de tres factores, como $5 \cdot 7 \cdot 2$, se pueden multiplicar dos cualesquiera de ellos y el resultado multiplicarlo por el tercero. En este caso es muy fácil multiplicar $5 \cdot 2 = 10$, y luego, $10 \cdot 7 = 70$. La notación matemática sería: $(5 \cdot 2) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$

c) Propiedad distributiva:

Vamos a realizar las siguientes operaciones de dos formas diferentes:

$$5 \times (4 + 3)$$

$$1^a) \quad 5 \times (4 + 3) = 5 \times 7 = 35$$

$$2^a) \quad 5 \times (4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3 = 20 + 15 = 35$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esta propiedad también se puede aplicar si en vez de una suma tenemos una resta:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

La operación inversa a la distributiva es **sacar factor común**:

Ejemplos resueltos

Sacar factor común:

$$a) \quad 5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times (4 + 3)$$

$$b) \quad 3 \times 7 - 3 \times 2 = 3 \times (7 - 2)$$

$$c) \quad 4 \times 7 - 4 \times 3 + 5 \times 4 = 4 \times (7 - 3 + 5)$$

$$d) \quad 3 \cdot a + 5 \cdot a = (3 + 5) \cdot a = 8 \cdot a$$

1.6.2. Casos particulares de la multiplicación

a) *Multiplicación de un número por la unidad seguida de ceros:*

Para multiplicar cualquier número por la unidad seguida de ceros, se escribe este número y se añaden tantos ceros como lleve la unidad.

$$34 \times 1000 = 34000 \qquad 10000 \times 15 = 150000$$

En algunos casos el producto de dos números se hace más fácilmente, si uno de los factores se descompone en una suma de dos sumandos uno de los cuales es la unidad seguida de ceros:

$$15 \times 102 = 15 \times (100 + 2) = (15 \times 100) + (15 \times 2) = 1500 + 30 = 1530$$

Hemos aplicado el producto de la unidad seguida de ceros y la propiedad distributiva.

b) *Multiplicación de números que terminan en cero:*

Para multiplicar dos o más números seguidos de ceros se multiplican dichos números, prescindiendo de los ceros, y se añade a ese producto tantos ceros como haya en los dos factores:

$$400 \times 30 = 12000 \qquad 2700 \times 60 = 162000$$

Actividad 5

Actividad 1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2306 \times 305 =$

b) $7650 \times 400 =$

c) $3785 \times 501 =$

Actividad 2. Sacar factor común:

a) $3 \cdot b + 5 \cdot b - 2 \cdot b$

b) $6x^4 + 3x^4 + 2x^4$

c) $6 \cdot a + 6 \cdot b$

d) $2 \cdot a + 2 \cdot c$

Actividad 3. Completa las siguientes expresiones:

- a) $425 \times 100 =$
- b) $632 \times \dots = 6300$
- c) $\dots \times 1000 = 35000$

1.7. División de números naturales

Existen numerosas situaciones de la vida cotidiana en las que utilizas la división. Es una operación que se utiliza para repartir.

Por ejemplo, tenemos que 84 huevos y queremos empaquetarlos por docenas. ¿Cuántas docenas tendremos?

Tenemos que encontrar un número que al multiplicarlo por 12 nos dé 84.

$$\begin{array}{r} 84 \overline{) 12} \\ \underline{0} \\ 7 \end{array}$$

Los términos de la división son:

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo} \longrightarrow 84 \overline{) 12} \longleftarrow \text{Divisor} \\ \text{Resto} \longrightarrow \underline{0} \longleftarrow \text{Cociente} \\ \phantom{\text{Resto}} \phantom{\underline{0}} \phantom{} \phantom{\text{Cociente}} \\ \phantom{\text{Resto}} \phantom{\underline{0}} \phantom{} \phantom{\text{Cociente}} \\ \phantom{\text{Resto}} \phantom{\underline{0}} \phantom{} \phantom{\text{Cociente}} \\ \phantom{\text{Resto}} \phantom{\underline{0}} \phantom{} \phantom{\text{Cociente}} \end{array}$$

El **dividendo** (84) indica el número de elementos que hay que repartir.

El **divisor** (12) indica el número de grupos que hay que hacer.

El **cociente** (7) indica el número de elementos que debe tener cada grupo.

El **resto** (0) indica los elementos que sobran. Cuando no sobra ninguno, como en este caso, la división se llama **exacta**, y cuando sobra algo, se llama **inexacta** o **entera**.

El símbolo que utilizamos para dividir es :

En la calculadora es . En el ordenador es .

Para realizar la división en la calculadora, teclearemos:



1.7.1. Cociente por defecto y por exceso

¿Qué ocurre si queremos hacer la división $42 : 5$?

No hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé 42, ya que

$$5 \times 8 = 40 \quad (\text{no llega})$$

$$5 \times 9 = 45 \quad (\text{se pasa})$$

Se dice que 8 es el cociente por defecto ya que al multiplicarlo por 5 da 40 y no llega a 42, y 9 es el cociente por exceso ya que al multiplicarlo por 9 da 45 y se pasa de 42.

A veces es mejor calcular el cociente por exceso y otras veces por defecto, según el tipo de situación que tengamos que resolver.

En toda división por defecto se cumple la siguiente **propiedad fundamental**:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}$$

De esta forma podemos comprobar si hemos realizado una división bien o mal:

$$\begin{array}{r} 74 \\ 2 \overline{) 74} \\ \underline{2} \\ 54 \\ \underline{54} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 8 \overline{) 74} \\ \underline{72} \\ 2 \end{array} \quad 74 = 9 \cdot 8 + 2$$

1.7.2. ¿Cómo se realiza una división?

Vamos a dividir $4610 : 53$

$\begin{array}{r} 4610 \\ 53 \overline{) 4610} \\ \underline{53} \\ 130 \\ \underline{106} \\ 240 \\ \underline{219} \\ 210 \\ \underline{210} \\ 0 \end{array}$	<p>Como el divisor tiene 2 cifras, tomamos las dos primeras cifras del dividendo: 46.</p> <p>Como 46 no se puede dividir entre 53, tomamos una cifra más: 461 dividido entre 53, que será aproximadamente 8, ya que $46 : 5 = 8$</p>
$\begin{array}{r} 461053 \\ 53 \overline{) 461053} \\ \underline{53} \\ 1305 \\ \underline{106} \\ 2405 \\ \underline{219} \\ 2105 \\ \underline{210} \\ 53 \\ \underline{53} \\ 0 \end{array}$	<p>Se hace la operación:</p> <p>$8 \cdot 3 = 24$, a 31 van 7 y llevamos 3.</p> <p>$8 \cdot 5 = 40$ y 3 que llevamos son 43, a 46 van 3</p>

$\begin{array}{r} 461053 \\ 3708 \end{array}$	<p>Ahora bajamos el 0 y repetimos el mismo proceso. Podemos pensar que $370 : 53$ son 7, pero al multiplicar $7 \cdot 53 = 371$, obtenemos un número mayor que 370, luego, pondremos en el cociente un 6</p>
$\begin{array}{r} 4610 \overline{) 53} \\ 37086 \\ \hline 52 \end{array}$	<p>Decimos: $6 \cdot 2 = 12$, a 20 van 8 y llevamos 2. $6 \cdot 5 = 30$ y dos que llevamos 32, a 37 van 5</p>

Se debe cumplir siempre que el resto debe ser menor que el divisor.

1.7.3. División por la unidad seguida de ceros

Para hallar el cociente de una división de un número terminado en ceros por la unidad seguida de ceros, se pueden tachar del dividendo tantos ceros como tiene la unidad. Para ello es necesario que el dividendo tenga al menos tantos ceros como el divisor, aunque en próximos temas veremos otra forma de hacerlo.

$$5300 : 100 = 53$$

$$580 : 10 = 58$$

Ejemplo resuelto

Para hacer una excursión de fin de curso se han apuntado 249 personas y vamos a contratar autobuses de 55 plazas. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?

$$\begin{array}{r} 249 \overline{) 55} \\ 29 \quad 4 \end{array}$$

Según la división se llenarían 4 autobuses, quedando aún 29 personas, por lo que nos hará falta un autobús más.

Por tanto la respuesta correcta es:

Son necesarios 5 autobuses.

Actividad 6

Actividad 1. Resuelve los siguientes problemas.

- Un grifo deja salir 15 litros de agua por minuto, ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un depósito de 675 litros?
- ¿Cuántos años son 5475 días? Se considera que un año tiene 365 días.
- Queremos guardar 768 latas de refresco en cajas de 24 latas cada una. ¿Cuántas cajas son necesarias?
- María, Antonio y Ana coleccionan sellos. Su tío tiene 235 para repartir entre los tres. ¿Cuántos puede dar a cada uno? ¿Sobrarán algún sello?

Actividad 2. Realiza las siguientes divisiones:

- $49067 : 31$
- $34597 : 475$

Actividad 3. Indica el cociente de las siguientes divisiones:

- $54000 : 1000 =$
- $7100 : 10 =$
- $470 : 10 =$
- $31000 : 100 =$

1.8. Prioridad de las operaciones

Si en una operación aparecen sumas, o restas y multiplicaciones o divisiones, el resultado varía según el orden en que se realicen.

Si en una expresión aparecen paréntesis, lo primero que hay que realizar son dichos paréntesis. Si no aparecen, hay que empezar siempre por efectuar las multiplicaciones o divisiones y luego las sumas y restas.

A veces aparecen además de los paréntesis, corchetes o llaves, veamos algunos ejemplos:

- $5 + 2 \cdot 3 + 4$
- $(3 + 5) \cdot 4 + 2$
- $4 \cdot 3 + 5 \cdot (4 + 2 \cdot 3)$

Módulo 1. Bloque 1. Tema 1: Números naturales y enteros.

- $5 - [4 + 3 \cdot (5 - 2) + 1]$
- $80 - [18 + 3 \cdot (5 - 2) - 2 \cdot 4 - (7 - 8 : 2)]$

Lo mejor es realizar estas operaciones de dentro a fuera, es decir, empezando por los paréntesis, siguiendo por los corchetes y finalizando con las llaves. Si dentro de algunos de ellos hay varias operaciones, se debe respetar la prioridad de las multiplicaciones y divisiones sobre las sumas y restas.

En primer lugar realizamos los paréntesis que se destacan:

$$80 - [18 + 3 \cdot \underline{(5 - 2)} - 2 \cdot 4 - (7 - \underline{8 : 2})] =$$
$$80 - [18 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - \underline{(7 - 4)}] =$$

Ahora realizamos las operaciones del corchete, pero respetando la prioridad de las multiplicaciones que hay:

$$80 - [18 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3] =$$
$$80 - [18 + 9 - 8 - 3] =$$

Ahora continuamos operando dentro del corchete:

$$80 - 16 = 64$$

Actividad 7

Actividad 1. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $3 \cdot 4 - 12 : 3 + 16 : 2 =$
- b) $24 : [4 + 16 : (7 - 3)] =$
- c) $16 + [2 \cdot (5 - 1) - 3 \cdot 2] - 3 \cdot 5 =$
- d) $32 - \{24 - [21 - 4 \cdot (5 - 2)] + 9\} =$

1.9. Utilización del ordenador para realizar diferentes operaciones

También podemos realizar cálculos con el ordenador. En este caso recurriremos a las hojas de cálculo. Aunque estos contenidos los abordaremos en una unidad didáctica más adelante, vamos a intentar explicar aquí los conceptos básicos para que puedas realizar cálculos sencillos.

Existen numerosos programas que manipulan datos con hojas de cálculo. Aquí veremos el más popular y extendido, aunque no el más barato: se trata de la hoja de cálculo Excel.

La principal función de las hojas de cálculo es realizar operaciones matemáticas, de la misma manera que trabaja la más potente calculadora, pero también la de computar complejas interrelaciones y ordenar y presentar en forma de gráfico los resultados obtenidos.

Los principales elementos de trabajo son:

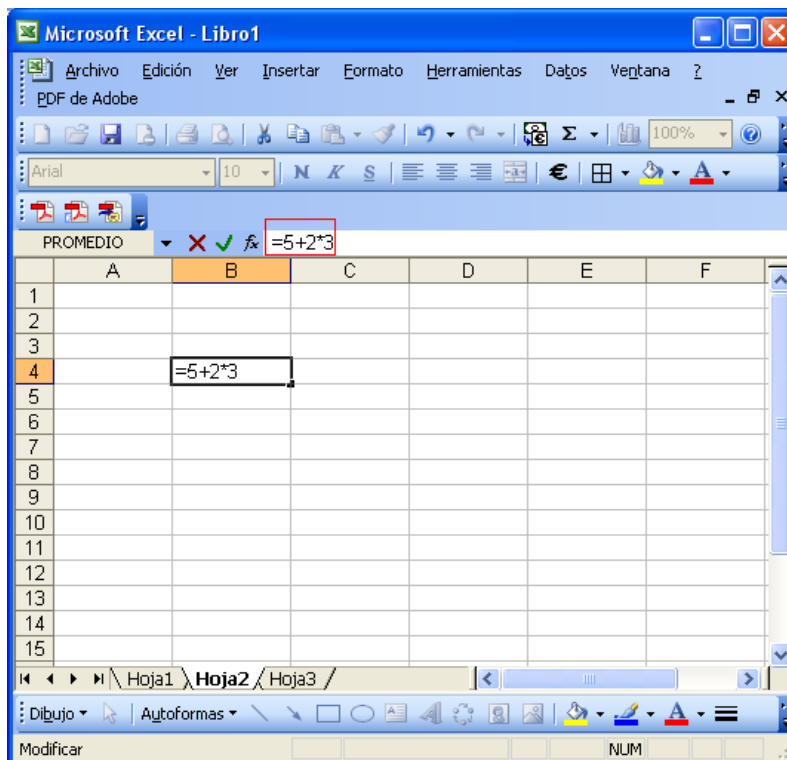
- **Fila:** Es un conjunto de varias celdas dispuestas en sentido horizontal.
- **Título de fila:** Está siempre a la izquierda y nombra a las filas mediante números.
- **Columna:** Es un conjunto de varias celdas dispuestas en sentido vertical.
- **Título de columna:** Está siempre arriba y nombra a las columnas mediante letras, que van desde la A hasta la IV. Después de la columna Z viene la AA, AB, AC, etc.; luego de la AZ viene la BA, la BB, la BC, etc.; y así sucesivamente.
- **Celda:** Es la intersección de una fila y una columna y en ella se introducen los datos, ya se trate de texto, números, fecha u otros tipos. Una celda se nombra mediante el nombre de la columna, seguido del nombre de la fila. Por ejemplo, la celda que es la intersección de la fila 29 con la columna F, se denomina F29.
- **Barra de fórmulas:** Barra situada en la parte superior de la ventana que muestra el valor constante o fórmula utilizada en la celda activa. Para escribir o modificar valores o fórmulas, seleccione una celda o un gráfico, escriba los datos y, a continuación, presione ENTRAR.

Las fórmulas en Excel comienzan con un signo igual (=) seguido de los elementos que van a calcularse (los operandos) y los operadores del cálculo. Cada operando puede ser un valor que no cambie (un valor constante), una referencia de celda y otras cosas que veremos en una unidad más adelante.

Los programas de hoja de cálculo siguen siempre la prioridad de las operaciones; es decir, primero realiza las multiplicaciones o divisiones y luego las sumas o restas. Si existen paréntesis, los prioriza sobre el resto de operaciones.

Por ejemplo, la siguiente fórmula da un resultado de 11 porque primero calcula la multiplicación antes que la suma:

Abre Excel, selecciona cualquier celda (por ejemplo B4), escribe en la barra de fórmulas $=5+2*3$ y pulsa Intro. En la celda seleccionada aparecerá 11.



Selecciona ahora otra celda y escribe en la barra de fórmulas: $=(5+2)*3$. Verás que ahora el resultado es 21, puesto que primero hace la suma del paréntesis y después multiplica por 3.

Ejemplo: Escribe en la barra de fórmulas la operación $= 34+5*2-7*(2+3)$ para ver cuál es el resultado.

El programa primero calcula el paréntesis $(2+3)$ que da 5.

A continuación las multiplicaciones $5*2$ que da como resultado 10 y $7*5$ que da 35.

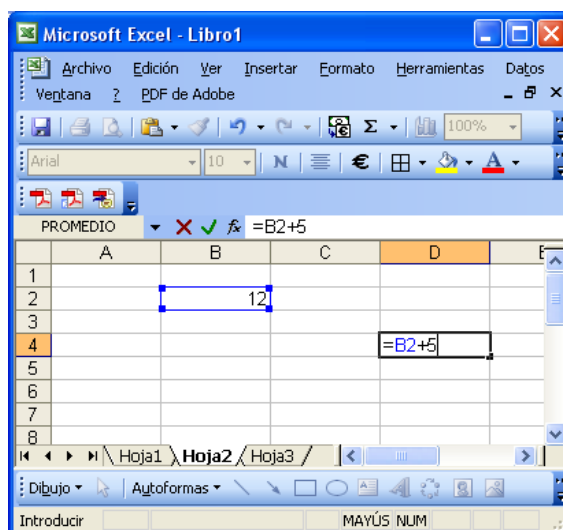
Nos queda $34 + 10 - 35$ que da como resultado 9

Referencias de celda: Una fórmula puede hacer referencia a una celda. Si deseas que una celda contenga el mismo valor que otra, introduce un signo igual seguido de la referencia a la celda. La celda que contiene la fórmula se denomina celda dependiente ya que su valor depende del valor en la otra celda. Siempre que se cambie la celda a la que hace referencia la fórmula, cambiará también la celda que contiene la fórmula.

La siguiente fórmula multiplica el valor en la celda B2 por 5. Cada vez que se cambie el valor en la celda B2 se volverá a calcular la fórmula.

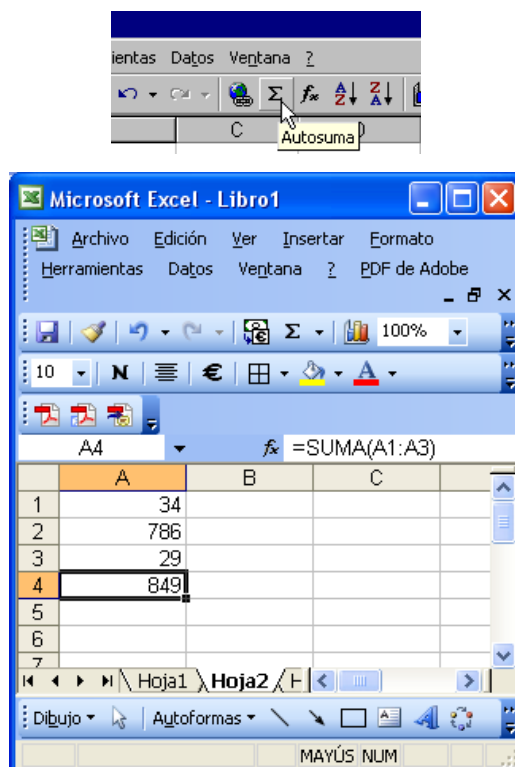
$$=B2*5$$

Es decir, en la celda B2 escribes un valor y en otra celda cualquiera escribes la fórmula $= B2*5$. Obtendrás el resultado de multiplicar el valor de lo que hayas escrito en la celda B2 por 5. Cada vez que cambies el valor de la celda B2 cambiará el resultado de la multiplicación. Mira la figura y practica con otros ejemplos.



También podemos realizar diversas operaciones con números colocados en diferentes celdas. Por ejemplo, en la celda A1 escribimos 34, en la celda A2 escribimos 786 y en la celda A3, escribimos 29. Ahora nos colocamos en la celda A4 y escribimos lo siguiente: =SUMA(A1:A3). Pulsamos Enter y nos realiza la suma.

También se puede hacer así: Nos colocamos en la celda A4, seleccionamos las celdas A1 a A3 y pulsamos sobre el símbolo sumatorio o autosuma.



Como hemos comentado al principio, la hoja de cálculo realiza múltiples operaciones.

Operadores matemáticos	
Sumar (+)	=10+5
Restar (-)	=10-5
Multiplicar (*)	=10*5
Dividir (/)	=10/5

Puedes probar a realizar restas, multiplicaciones y divisiones.

Vamos a organizar una hoja que nos calcule el cociente y el resto de una división:
Abre una hoja de cálculo nueva. En la celda A1 escribe DIVIDENDO. En la celda B1 vamos a escribir el dividendo de la división, por ejemplo escribe 3478. En la celda A2 escribe DIVISOR. En la celda B2 vamos a escribir el divisor, por ejemplo 56.

En la celda A3 escribe COCIENTE.

En la celda B3 vamos a escribir la fórmula que nos calculará el cociente. Sitúate en la celda B3 y en la barra de fórmulas escribe: =COCIENTE(B1;B2) y pulsa Intro. Obtendrás 62

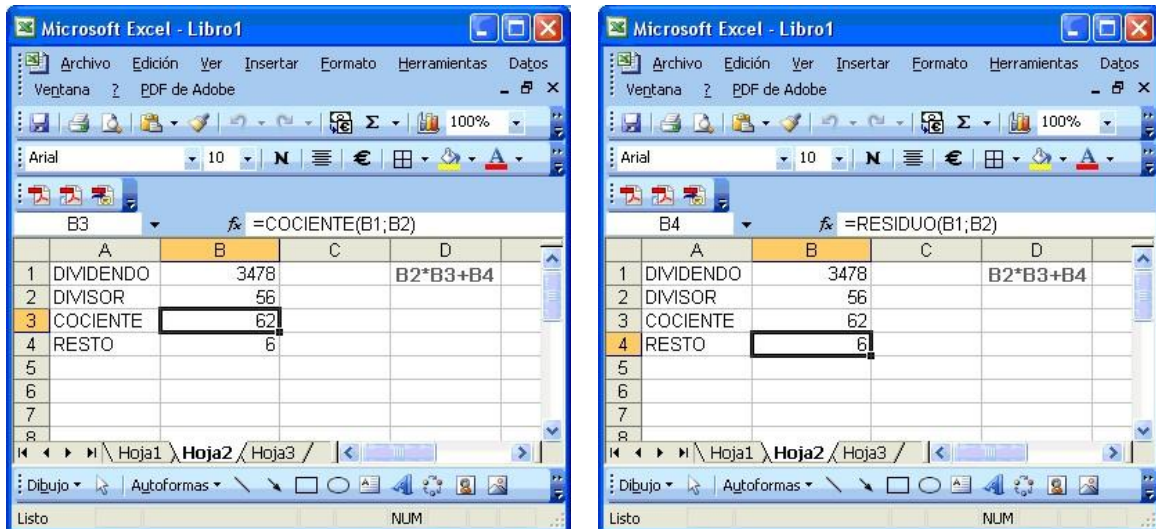
NOTA: Si esta función no está disponible y devuelve el error #¿NOMBRE?, instala y carga el programa de complementos Herramientas para análisis. Lo puedes hacer así:

1. En el menú **Herramientas**, elije **Complementos**.
2. En la lista **Complementos disponibles**, selecciona el cuadro **Herramientas para análisis** y, a continuación, haz clic en **Aceptar**.
3. Si es necesario, sigue las instrucciones del programa de instalación.

En la celda A4 escribe RESTO.

En la celda B4 vamos a escribir la fórmula que calculará el resto. Sitúate en dicha celda B4 y en la barra de fórmulas escribe: =RESIDUO(B1;B2) y pulsa Intro. Obtendrás 6.

Ahora no tienes más que cambiar el valor de las celdas B1 y B2 para ir calculando las divisiones que desees.



2. El número entero

2.1 Concepto

En la unidad anterior hemos trabajado y estudiado con los números naturales. Pero hay muchas situaciones que no se pueden expresar utilizando sólo los números naturales:

- Cuando en invierno decimos que la temperatura en cierto lugar es de 7 grados bajo cero.
- Si tenemos en el banco 2.000 euros y nos cobran un recibo de 3.000.
- Cuando decimos que cierto personaje nació en el año 546 antes de Cristo.
- Para expresar el nivel por debajo del mar o los sótanos de un edificio.

Para escribir todas estas expresiones los números naturales no son suficientes. Es necesario una referencia y una forma de contar a ambos lados de ésta. La referencia es el cero y los números que vamos a escribir a ambos lados son los números naturales precedidos del signo más o menos.

A todos estos números, los negativos, el cero y los positivos se les llaman **números enteros** y se representan por la letra **Z**:

$$Z = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$

Los **enteros positivos** se obtienen colocando el signo **+** delante de los números naturales.

Los **enteros negativos** se obtienen colocando el signo **-** delante de los números naturales.

Observa que los números enteros no son naturales (no existen -2 peras). Son números creados para referirse a situaciones en las que se marca un origen (que se considera valor **0**) que provoca un antes y un después, un delante y un detrás, un arriba y abajo.

Como hemos visto al principio, los números enteros aparecen en muchas situaciones de la vida diaria:

- Para medir la temperatura por encima de 0 grados se indican con números enteros positivos, mientras que las temperaturas por debajo de 0 grados se indican con números enteros negativos. Ejemplo $+5^{\circ}$, -7°
- Los saldos bancarios a nuestro favor se indican con los números enteros positivos, mientras que los que son en nuestra contra se indican con los números enteros negativos. Ejemplo, tenemos 2.000 euros, nos cobran en el banco -3.000 euros
- Para referirnos a los años de nuestra era, es decir, a partir del nacimiento de Cristo, utilizamos los números enteros positivos, mientras que los años anteriores a su nacimiento los indicamos que los números enteros negativos. Ejemplo, cierto personaje nació en el año -546.
- Para medir altitudes se considera 0 el nivel del mar, los niveles por encima del mar se pueden expresar por números enteros positivos, y los niveles por debajo del nivel del mar se pueden expresar por números enteros negativos.
- Para señalar el número de plantas de un edificio en el ascensor. Utilizamos números negativos para las plantas que están por debajo de cero, es decir, para los sótanos o plantas subterráneas.

Actividad 8

1. Ayúdate del esquema del ascensor y completa:

Planta	4
Planta	3
Planta	2
Planta	1
Planta baja	0
Planta	-1
Planta	-2
Planta	-3
Planta	-4

- De la planta -1 a la planta -3 el ascensorbajaplantas.
- De la planta 3 a la planta 0 el ascensor..... [sube o baja]plantas.
- De la planta -3 a la planta -2 el ascensor..... [sube o baja]plantas.
- De la planta -2 a la planta 2 el ascensor..... [sube o baja]plantas.
- De la planta 4 a la planta -2 el ascensor [sube o baja]plantas.

2. Expresa numéricamente estos hechos:

- Estar situado a 310 m sobre el nivel del mar.
- Perder 400 euros
- Ocho grados bajo cero
- Ganar 300 euros.
- El año 370 a. C.
- Diecisiete grados sobre cero
- Bucear a 11 metros de profundidad.

2.2 Representación de los enteros en la recta numérica

Para representar los números enteros en la recta numérica procedemos así:

1. Trazamos una línea recta y situamos en ella el 0.



El 0 divide a la recta en dos semirrectas.

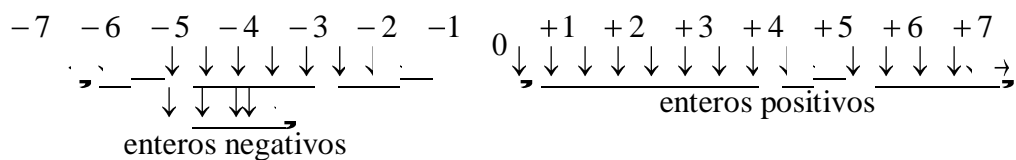
2. Dividimos cada una de las semirrectas en partes iguales:



3. Situamos los números enteros: los enteros positivos a la derecha del cero y los enteros negativos a la izquierda del cero:



Es decir, quedaría de la siguiente forma:



Actividad 9

Sitúa en la recta numérica los siguientes números enteros: -3, +2, +5, +9, -6, +11, -11.

2.2 Valor absoluto de un número entero

Observa la recta numérica:



Los números -6 y $+6$ se encuentran a la misma distancia del cero. Ocurre así porque los dos números están formados por el mismo número natural, el 6, aunque con distinto signo. Al número 6 se le llama **valor absoluto** de $+6$ y -6 .

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo. El símbolo que se utiliza para representar el valor absoluto es el número escrito entre barras.

$$\angle +10 \angle = 10 \qquad \angle -5 \angle = 5$$

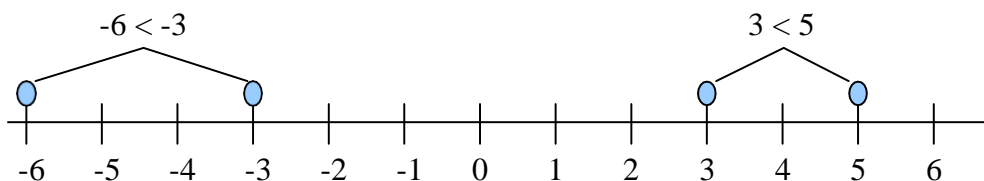
Actividad 10

Responde a estas preguntas:

- Si el valor absoluto de un número es 4, ¿qué número puede ser?
- Si el valor absoluto de un número es 5 y sabes que está a la izquierda del 0, ¿qué número es?
- ¿Qué número tiene valor absoluto 7 y está situado entre -6 y -8 ?

2.3 Comparación y ordenación de números enteros

Para **comparar dos números enteros**, lo más fácil es situarlos en la recta numérica. El **mayor** de ellos es el que está **situado más a la derecha**.



De esta forma observamos que:

- Cualquier entero positivo es **mayor que** cualquier entero negativo. Por ejemplo, $+2 > -4$ $-5 < +5$.
- El 0 es menor que cualquier positivo y mayor que cualquier negativo. Ejemplos: $0 < +3$ $-5 < 0$.
- Dados dos números **enteros positivos**, es **mayor** el que tiene **mayor valor absoluto** (no olvides que el valor absoluto es lo que nos queda si quitamos el signo). Ej.: $+7 > +4$ $+3 < +5$.
- Dados dos números **enteros negativos**, es **mayor** el que tiene **menor valor absoluto**. Ejemplos:
 - $-4 > -7$ (*porque $4 < 7$*)
 - $-6 < -3$ (*porque $3 < 6$*)

Actividad 11

1. Ordena de menor a mayor los números:

a) +6, -10, 0, -5, +4, +3

b) +4, -7, +2, -8, -6, +8

2. Escribe en cada caso los signos $>$ o $<$, según corresponda:

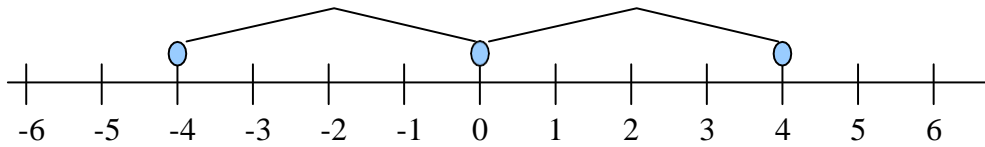
a) -4 -3

b) -2 +6

c) 0 -8

d) +6 +5

2.4 Opuesto de un número entero



Observa que 4 y -4 se encuentran a la misma distancia de 0. Son simétricos respecto al 0.

Tienen el mismo valor absoluto, pero distinto signo.

$$\text{Op}(4) = -4 \quad \text{Op}(-4) = 4$$

Aquellos números que se encuentran a la misma distancia del cero se les llaman **números opuestos**.

En conclusión, podemos decir que el **opuesto de un número** entero es aquel que tiene el **mismo valor absoluto** pero **distinto signo**.

Actividad 12

Escribe los opuestos de los siguientes números:

- a) $\text{Op}(+4) =$
- b) $\text{Op}(-6) =$
- c) $\text{Op}(-5) =$
- d) $\text{Op}(3) =$
- e) $\text{Op}(0) =$
- f) $\text{Op}(-8) =$

3. Operaciones con números enteros

3.1 Suma de números enteros

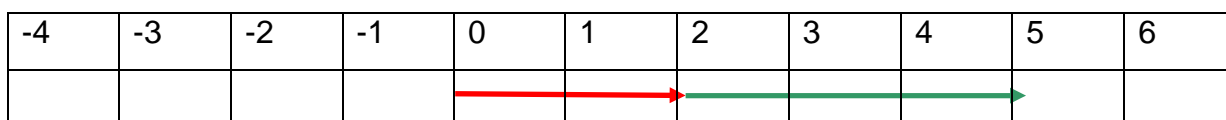
¿Quieres saber cómo se suman los números enteros?. Podemos distinguir varios casos:

3.1 a. Suma de números enteros con el mismo signo

Supongamos que estamos en la segunda planta de unos grandes almacenes. Si subimos tres plantas más ¿En que planta nos encontramos ahora?

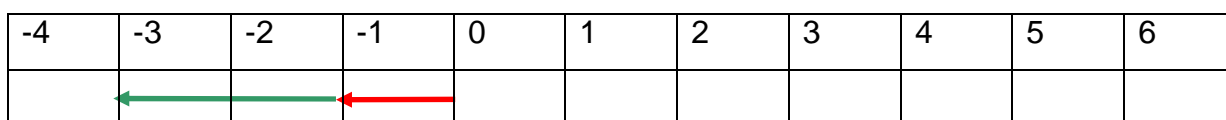
La respuesta es en la quinta planta. La operación que hemos realizado es una suma de números enteros:

$$(+2) + (+3) = (+5). \text{ También se puede escribir como } 2 + 3 = 5$$



¿Y si nos encontramos en el primer sótano y bajamos dos plantas más? ¿Dónde estamos ahora? De nuevo hay que hacer una suma de números enteros:

$$(-1) + (-2) = (-3) \text{ ó } -1 - 2 = -3. \text{ Estamos en el tercer sótano.}$$



Para sumar números enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos.

Date cuenta que:

- La suma de dos números enteros negativos es otro número negativo.
- La suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

Ejemplo:

a.) $(+5) + (+7) = +12$

b.) $(-3) + (-6) = -9$

3.1 b. Suma de números enteros con distinto signo

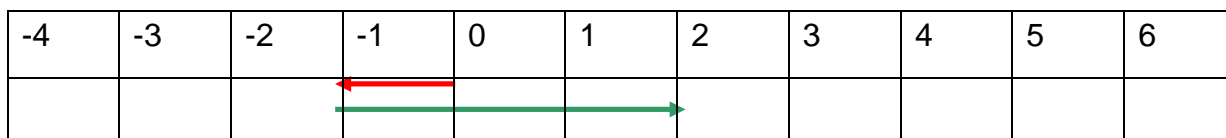
Si nos encontramos en la cuarta planta y bajamos dos plantas. ¿Dónde estamos?

$(+4) + (-2) = (+2)$. Si te das cuenta hemos realizado una resta $4 - 2 = 2$



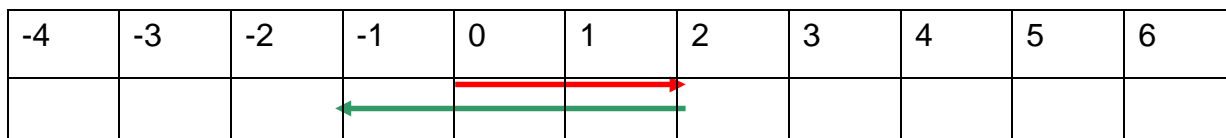
Si subimos tres plantas desde el sótano nos encontraríamos en la planta dos.

$(-1) + (+3) = (+2)$. También hemos realizado una resta $-1 + 3 = 2$



Si bajamos tres plantas desde la segunda habríamos llegado al primer sótano.

$(+2) + (-3) = (-1)$. Aquí también hay una resta $2 - 3 = -1$



Para **sumar** números enteros de **distinto signo**, se **restan** sus valores absolutos, y se pone el **signo** del que tiene **mayor** valor absoluto.

Veamos unos ejemplos:

a.) $(-7) + (+12) = +5$ *Porque el de mayor valor absoluto es positivo (+12)*

b.) $11 + (-16) = -5$ *Porque el de mayor valor absoluto es negativo (-16)*

Si lo que tenemos es una suma de varios números enteros de distinto signo, lo que haremos será:

- Se suman separadamente los números positivos, por un lado y los negativos por el otro.
- Se suman el número positivo y el número negativo obtenido.

Ejemplo: Vamos a calcular el resultado de esta suma:

$$(+4) + (-2) + (+3) + (+5) + (-6) = (+12) + (-8) = +4$$

3.2 Resta de números enteros

Adrián debe a su hermano Carlos 420 euros. Esto lo expresamos matemáticamente diciendo que Adrián tiene **-420 euros**.

También debe a su hermano Raúl 60 euros. Escribimos **-60 euros**.

¿Cuánto debe en total Adrián? Para saberlo, sumamos las dos deudas:

$$-420 + (-60) = -480 \text{ euros.}$$

Su hermano Raúl le ha perdonado su parte de la deuda: 60 euros. ¿Cuánto debe ahora Adrián? Para saberlo, del total de la deuda hay que quitar lo que le ha perdonado su hermano:

$$-480 - (-60) = -480 + 60 = -420 \text{ euros.}$$

Antes de explicar como se restan dos números enteros, recordemos como nombrábamos a los términos que aparecen en una resta con un ejemplo: en $-3 - 5$, a -3 se le llama minuendo y a 5 sustraendo.

Pues bien, para restar dos **números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo**.

De esta forma la resta de números enteros se transforma en una suma:

Ejercicio resuelto:

Calcula las siguientes restas

$$\bullet (-5) - (+7) = (-5) + (-7) = -12$$

$$\bullet (+4) - (-6) = (+4) + (+6) = +10$$

$$\bullet (-3) - (-7) = (-3) + (+7) = +4$$

$$\bullet (+4) - (+2) = (+4) + (-2) = +2$$

$$\bullet (+4) - (+6) = (+4) + (-6) = -2$$

¿Y qué ocurre cuando hay un paréntesis?

Para restar un número entero, si este está dentro de un paréntesis, se cambia el signo del número.

Date cuenta que el **signo (-)** puede tener dos significados:

- Puede indicar que un número es negativo (signo de número). Ejemplo: -8.
- Puede indicar una resta (signo de operación). Así, en $14 - (-6)$ el primer signo menos, el que está antes del paréntesis $-$, es de operación (resta), mientras que el segundo $-$, es de número.

En la primera unidad vimos que el paréntesis nos indica qué operaciones tenemos que realizar primero. Para realizar la operación $7 + (5 - 16)$, lo hacemos así:

- Primero hacemos la operación indicada dentro del paréntesis.
- Si delante del paréntesis tenemos un signo $+$, no cambiamos el signo del resultado de efectuar las operaciones del paréntesis.
- Pero si delante del paréntesis hay un signo $-$, cambiamos de signo el resultado del paréntesis.

Lo mismo ocurre si hay corchete. Por tanto, la operación anterior quedaría así:

$$7 + (-11) = 7 - 11 = -4$$

Vamos a hacer la misma operación, pero con un signo $-$ delante del paréntesis:

$$7 - (5 - 16) = 7 - (-11) = 7 + 11 = +18$$

Actividad 13

1. Resuelve estas restas:

a) $12 - 5 =$

b) $12 - (-5) =$

c) $-12 - 5 =$

d) $-12 - (-5) =$

2. Realiza estas operaciones:

a) $(+6) - (-2) + (-5) - (+4) =$

b) $(-5) - (-5) - (+7) + (-6) =$

c) $(-1) - (-10) + (+5) - (+7) =$

d) $14 - (12 + 2) =$

e) $17 - (-9 - 14) =$

f) $-14 + (6 - 13) =$

g) $2 + (7 - 3) - (8 - 4) =$

h) $-1 - (2 - 5) + (7 - 4) =$

3.3 Multiplicación de números enteros

Supuesto 1. El día de hoy a las seis de la mañana había una temperatura de 5°C . Cada hora la temperatura aumenta 2°C . ¿Qué temperatura habrá a las diez de la mañana?

Entre las seis y las diez han transcurrido cuatro horas y el incremento de temperatura será de 8°C . La temperatura que habrá será de 13°C .

Las operaciones que hemos realizado son una multiplicación y una suma de números enteros:

$$(+4) \cdot (+2) = +8^{\circ}\text{C}$$

$$(+5) + (+8) = +13^{\circ}\text{C}$$



Supuesto 2. Si la temperatura hubiese disminuido dos grados cada hora, la bajada sería de $-8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Luego la temperatura sería de $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Las operaciones a realizar son:

$$(+4) \cdot (-2) = -8\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$(+5) + (-8) = -3\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Supuesto 3. También se puede plantear diciendo que son las 10 de la mañana y si desde hace cuatro horas la temperatura ha aumentado $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ por hora significaría que hace cuatro horas había 8 grados menos, luego la operación es:

$$(-4) \cdot (+2) = -8\text{ }^{\circ}\text{C}$$

y la temperatura a la que estábamos era

$$(+5) + (-8) = -3\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Supuesto 4. Si desde hace cuatro horas la temperatura ha bajado $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ por hora significaría que la temperatura era $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ mayor que la que tenemos ahora:

$$(-4) \cdot (-2) = +8\text{ }^{\circ}\text{C}$$

luego había

$$(+5) + (+8) = +13\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Para hallar el producto de dos números enteros hay que multiplicar sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo cuando ambos números o factores tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos diferentes.

Es lo que llamamos la **regla de los signos**:

+	.	+	=	+
-	.	-	=	+
+	.	-	=	-
-	.	+	=	-

Ejemplos:

$$(+5) \cdot (+3) = +15$$

$$(-5) \cdot (-3) = +15$$

$$(+5) \cdot (-3) = -15$$

$$(-5) \cdot (+3) = -15$$

Actividad 14

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-4) \cdot (+2) =$

b) $(+3) \cdot (+7) =$

c) $(+3) \cdot (-5) =$

d) $(-5) \cdot (-12) =$

e) $2 \cdot (-3) =$

f) $4 \cdot (-5) \cdot 2 =$

g) $3 \cdot (-3) \cdot (-7) =$

h) $(-2) \cdot (-5) \cdot (-9) =$

2. Realiza estas operaciones:

a) $3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-5) =$

b) $-2 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 - 2)] =$

c) $17 - 9 \cdot 2 - (-5) \cdot (-4) =$

d) $2 \cdot (6 + 4) - (1 - 8) + (-1) \cdot (6 + 1) - 1 =$

3.4 División de números enteros

¿Cuánto baja la temperatura cada hora si en cuatro horas ha bajado $-8\text{ }^{\circ}\text{C}$? La respuesta es $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La operación ha realizar es una división:

$$(-8) : (+4) = -2\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Para dividir dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El cociente tiene signo positivo si los dos números o factores tienen el mismo signo y signo negativo si tienen diferentes signos.

Se sigue la misma regla de los signos que para el producto.

En el apartado siguiente veremos la utilidad del uso de los números enteros para resolver problemas, siendo imprescindibles para manejar el lenguaje algebraico, es decir, operaciones con números y letras.

Actividad 15

Realiza estas operaciones:

a) $6 : (-2) =$

b) $(-20) : (+10) =$

c) $(-30) : (-5)$

d) $(1 - 9 + 2) : (-3) =$

4. Respuestas de las actividades

Respuestas actividad 1

Actividad 1:

- a) Cuatrocientos treinta y cinco millones, doscientos siete mil setecientos cincuenta y seis
- b) Dieciséis millones, quinientos tres mil doscientos tres
- c) Trescientos treinta y cinco mil seiscientos noventa y ocho
- d) Doscientos mil catorce

Actividad 2:

- a) 2.008
 - b) 600.432
 - c) 10.005
 - d) 12.315.201
 - e) 110.200.009
 - f) 305.022
-
- a) $5605 > 5506$
 - b) $646 < 664$
 - c) $5010 > 5001$
 - d) $6304 < 6403$

Respuestas actividad 2

Actividad 1.

- a) $5605 > 5506$
- b) $646 < 664$
- c) $5010 > 5001$
- d) $6304 < 6403$

Actividad 2.

$45.693 < 54.956 < 56.505 < 78.549$

Respuestas actividad 3

- a) 15395
- b) 683845
- c) 5801

Respuestas actividad 4

Actividad 1.

204, 2955

Actividad 2.

882405, 1438294

Respuestas actividad 5

Actividad 1.

703330, 3060000, 1896285

Actividad 2.

$$3 \cdot b + 5 \cdot b - 2 \cdot b = (3 + 5 - 2) \cdot b,$$

$$6 \times 4 + 3 \times 4 + 2 \times 4 = (6 + 3 + 2) \times 4$$

$$6 \cdot a + 6 \cdot b = 6 \cdot (a + b)$$

$$2 \cdot a + 2 \cdot c = 2 \cdot (a + c)$$

Actividad 3.

42500, 1000

Respuestas actividad 6

Actividad 1

- a) $675 : 15 = 45$ minutos
- b) $5475 : 365 = 15$ años
- c) $768 : 24 = 32$ latas
- d) $235 : 3 \Rightarrow$ Cociente: 78; Resto: 1. 78 sellos a cada uno y sobra un sello

Actividad 2

- a) Cociente: 1582; Resto: 25
- b) *Cociente: 72; Resto: 397*

Actividad 3

- a) 54
- b) 710
- c) 47
- d) 310

Respuestas actividad 7

- a) 16
- b) 3
- c) 3
- d) 26

Respuestas actividad 8

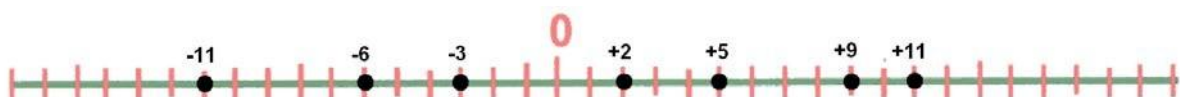
Actividad 1.

- a) baja 2
- b) *baja 3*
- c) *sube 1*
- d) *sube 4*
- e) *baja 6*

Actividad 2.

- +310
- 400
- 8
- +300
- 370
- +17
- 11

Respuestas actividad 9



Respuestas actividad 10

$$+4 \text{ ó } -4$$

$$-5$$

$$-7$$

Respuestas actividad 11

Actividad 1.

$$-10, -5, 0, +3, +4, +6$$

$$-8, -7, -6, +2, +4, +8$$

Actividad 2.

$$-4 < -3$$

$$-2 < +6$$

$$0 > -8$$

$$+6 > +5$$

Respuestas actividad 12

$$a) Op(+4) = -4$$

$$b) Op(-6) = 6$$

$$c) Op(-5) = 5$$

$$d) Op(3) = -3$$

$$e) Op(0) = 0$$

$$f) Op(-8) = +8$$

Respuestas actividad 13

Actividad 1.

$$a) 12 - 5 = 7$$

$$b) 12 - (-5) = 12 + 5 = 17$$

$$c) -12 - 5 = -17$$

$$d) -12 - (-5) = -12 + 5 = -7$$

Actividad 2.

- a) $(+6) - (-2) + (-5) - (+4) = 6 + 2 - 5 - 4 = 8 - 9 = -1$
- b) $(-5) - (-5) - (+7) + (-6) = -5 + 5 - 7 - 6 = 5 - 18 = -13$
- c) $(-1) - (-10) + (+5) - (+7) = -1 + 10 + 5 - 7 = 15 - 8 = 7$
- d) $14 - (12 + 2) = 14 - 14 = 0$
- e) $17 - (-9 - 14) = 17 - (-23) = 17 + 23 = 40$
- f) $-14 + (6 - 13) = -14 + (-7) = -21$
- g) $2 + (7 - 3) - (8 - 4) = 2 + 4 - 4 = 2$
- h) $-1 - (2 - 5) + (7 - 4) = -1 - (-3) + 3 = -1 + 3 + 3 = 5$

Respuestas actividad 14

Actividad 1.

- 8
- 21
- 15
- 60
- 6
- 40
- 63
- 90

Actividad 2.

- a) $3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-5) = -9 - 8 + 20 = 20 - 17 = 3$
- b) $-2 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 - 2)] = -2 \cdot [-6 + 5 \cdot (-6)] = -2 \cdot (-6 - 30) = -2 \cdot (-36) = 72$
- c) $17 - 9 \cdot 2 - (-5) \cdot (-4) = 17 - 18 - (+20) = 17 - 18 - 20 = 17 - 38 = -21$
- d) $2 \cdot (6 + 4) - (1 - 8) + (-1) \cdot (6 + 1) - 1 = 2 \cdot 10 - (-7) + (-1) \cdot 7 - 1 =$
 $= 20 + 7 - 7 - 1 = 19$