



Ámbito

Científico MÓDULO 4

Tecnológico

**BLOQUE 10: Funciones. Transformaciones Químicas.**

**BLOQUE 11: Trigonometría. Materia.**

**Genética Molecular.**

**BLOQUE 12: Probabilidad. Movimientos y fuerzas.**

**Energía y trabajo.**

CEPA Los Llanos. (Albacete)

Curso: 2017/2018

Estos materiales se han realizado tomando como referencia y extrayendo contenidos de múltiples libros, apuntes de otros profesores, propios y recursos de internet abiertos al público.

# INDICE

## BLOQUE 10:

- Tema 1: Interpretación de Funciones y gráficas. Función lineal. La química en la sociedad.
- Tema 2: Función cuadrática. Transformaciones químicas. I+D+I

## BLOQUE 11:

- Tema 3: Trigonometría.
- Tema 4: Materia.
- Tema 5: Genética.

## BLOQUE 12:

- Tema 6: Probabilidad.
- Tema 7: Movimientos y fuerzas.
- Tema 8: Energía y trabajo.

## BLOQUE 10

- **TEMA 1: Interpretación de Funciones y gráficas. Función lineal. La química en la sociedad.**

### INDICE:

- 1.-FUNCIONES: CONCEPTOS PREVIOS
- 2.-FUNCIONES
- 3.-CONCEPTO DE FUNCIÓN
- 4.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN
- 5.-INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS
- 6.- LA FUNCIÓN LINEAL
- 7.- LA FUNCIÓN AFÍN
- 8.- ECUACIÓN DE LA RECTA
- 9.- OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA
- 10.- RECTAS PARALELAS
- 11.- LA QUÍMICA EN LA SOCIEDAD

# 1.-FUNCIONES: CONCEPTOS PREVIOS

## 1.1.- Coordenadas cartesianas

### ANTES, DEBES SABER...

#### Qué son rectas perpendiculares

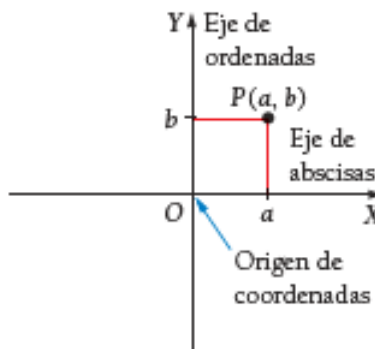
Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos rectos.



Para representar puntos en el plano se utilizan dos rectas numéricas perpendiculares, denominadas ejes de coordenadas.

Un sistema de coordenadas cartesianas está formado por:

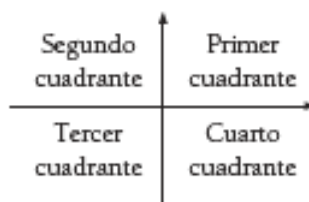
- Eje de abscisas, que es la recta horizontal y se representa por  $X$ .
- Eje de ordenadas, que es la recta vertical y se representa por  $Y$ .
- Origen de coordenadas, que es el punto de corte de los ejes y se representa por  $O$ . El origen de coordenadas coincide con el 0 de ambas rectas numéricas.



Un punto  $P$  del plano queda determinado por un par de números,  $(a, b)$ , llamados coordenadas cartesianas del punto  $P$ , y se escribe  $P(a, b)$ .

- El número  $a$  es la abscisa del punto  $P$  y se mide en el eje horizontal.
- El número  $b$  es la ordenada del punto  $P$  y se mide en el eje vertical.
- El punto  $O$  representa el punto  $(0, 0)$ .

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro partes, cada una de las cuales se llama cuadrante.



### DATE CUENTA



- Si la abscisa es positiva, el punto está a la derecha del origen de coordenadas, y si es negativa, a la izquierda.
- Si la ordenada es positiva, el punto está por encima del origen de coordenadas, y si es negativa, por debajo.

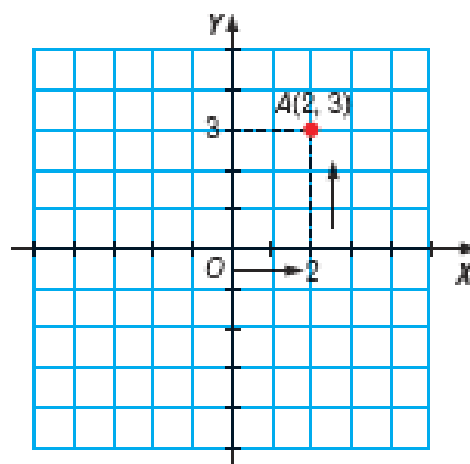
### 1.1.1. PUNTOS DEL PRIMER CUADRANTE:

Un punto  $P(a, b)$  del primer cuadrante tiene la abscisa,  $a$ , positiva y la ordenada,  $b$ , positiva.

#### EJEMPLO

2 Representa el punto  $A(2, 3)$ .

- La primera coordenada  $x = 2$  es positiva: nos desplazamos 2 unidades a la derecha.
- La segunda coordenada  $y = 3$  también es positiva: nos desplazamos 3 unidades hacia arriba, desde la abscisa anterior.



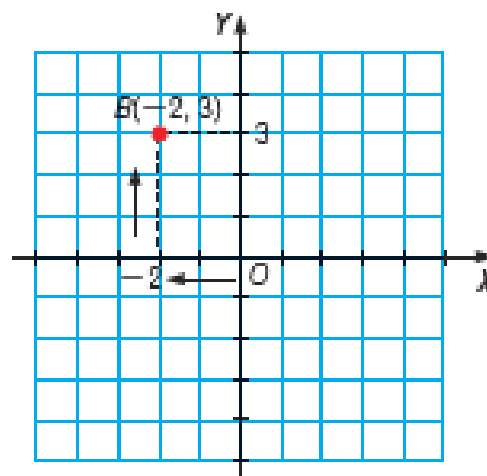
### 1.1.2.-PUNTOS DEL SEGUNDO CUADRANTE:

Un punto  $P(a, b)$  del segundo cuadrante tiene la abscisa,  $a$ , negativa y la ordenada,  $b$ , positiva.

#### EJEMPLO

3 Representa el punto  $B(-2, 3)$ .

- La primera coordenada  $x = -2$  es negativa: nos desplazamos 2 unidades a la izquierda.
- La segunda coordenada  $y = 3$  es positiva: nos desplazamos 3 unidades hacia arriba, desde la abscisa anterior.



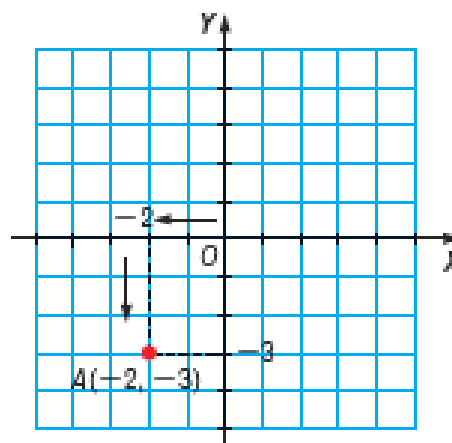
### 1.1.3.-PUNTOS DEL TERCER CUADRANTE:

Un punto  $P(a, b)$  del tercer cuadrante tiene la abscisa,  $a$ , negativa y la ordenada,  $b$ , negativa.

#### EJEMPLO

4 Representa el punto  $A(-2, -3)$ .

- La primera coordenada  $x = -2$  es negativa: nos desplazamos 2 unidades a la izquierda.
- La segunda coordenada  $y = -3$  también es negativa: nos desplazamos 3 unidades hacia abajo, desde la abscisa anterior.



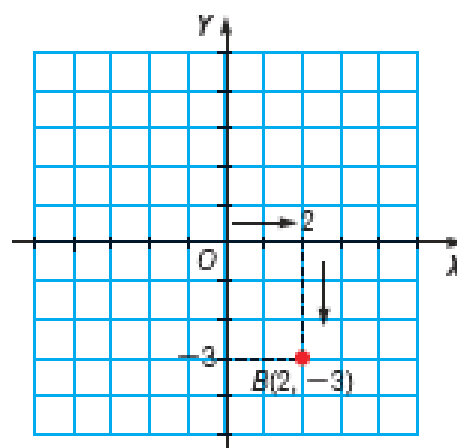
### 1.1.4.-PUNTOS DEL CUARTO CUADRANTE:

Un punto  $P(a, b)$  del cuarto cuadrante tiene la abscisa,  $a$ , positiva y la ordenada,  $b$ , negativa.

#### EJEMPLO

5 Representa el punto  $B(2, -3)$ .

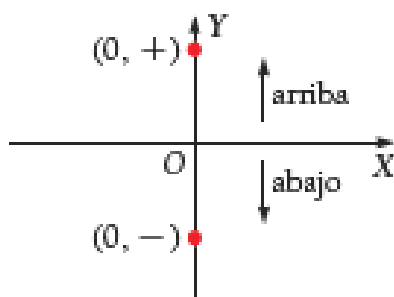
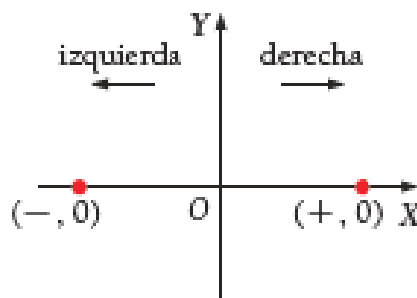
- La primera coordenada  $x = 2$  es positiva: nos desplazamos 2 unidades a la derecha.
- La segunda coordenada  $y = -3$  es negativa: nos desplazamos 3 unidades hacia abajo, desde la abscisa anterior.



## 1.1.5.-PUNTOS SOBRE LOS EJES DE COORDENADAS:

Los puntos que están situados sobre el eje  $X$  son de la forma  $(a, 0)$ , es decir, su ordenada es 0.

Si la coordenada  $a$  es positiva, están a la derecha del origen de coordenadas, y si es negativa, a la izquierda.



Los puntos que están situados sobre el eje  $Y$  son de la forma  $(0, b)$ , es decir, su abscisa es 0.

Si la coordenada  $b$  es positiva, están por encima del origen de coordenadas, y si es negativa, por debajo.

### EJEMPLO

**6** Representa los puntos  $A(2, 0)$ ,  $B(-4, 0)$ ,  $C(0, 2)$  y  $D(0, -3)$ .

$A(2, 0) \rightarrow$  Nos desplazamos 2 unidades a la derecha,  $x = 2$ .

La ordenada es cero,  $y = 0$ .

El punto  $A$  se sitúa en el mismo eje de abscisas.

$B(-4, 0) \rightarrow$  Nos desplazamos 4 unidades a la izquierda,  $x = -4$ .

La ordenada es cero,  $y = 0$ .

El punto  $B$  se sitúa en el mismo eje de abscisas.

$C(0, 2) \rightarrow$  La abscisa es cero,  $x = 0$ .

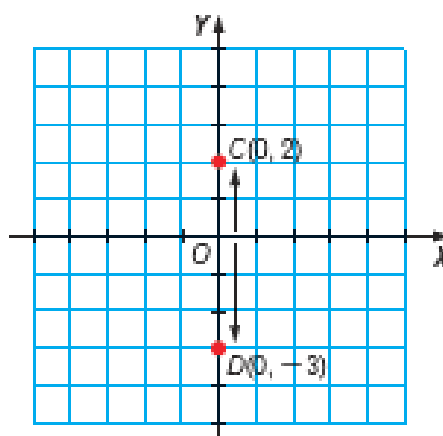
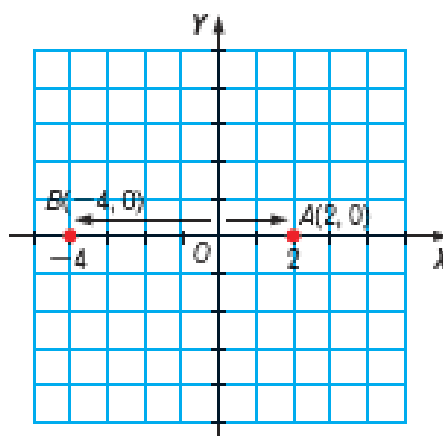
Nos desplazamos 2 unidades hacia arriba,  $y = 2$ .

El punto  $C$  se sitúa en el mismo eje de ordenadas.

$D(0, -3) \rightarrow$  La abscisa es cero,  $x = 0$ .

Nos desplazamos 3 unidades hacia abajo,  $y = -3$ .

El punto  $D$  se sitúa en el mismo eje de ordenadas.



## 2.-FUNCIONES

### Concepto de función

Se denomina **función** a la relación que asocia a cada valor de una magnitud un único valor de otra magnitud.

Si representamos los pares de valores que obtenemos en un sistema de coordenadas obtenemos la **representación gráfica de una función**.

### Expresión de una función mediante una gráfica

La gráfica de una función es la representación del conjunto de puntos que define a esa función.

### ANTES, DEBES SABER...

#### Cómo se construye una tabla numérica

A partir de unos datos obtenemos otros que cumplen una condición.

| Número    | 1               | 2               | 3               | 4                |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| Su triple | $1 \cdot 3 = 3$ | $2 \cdot 3 = 6$ | $3 \cdot 3 = 9$ | $4 \cdot 3 = 12$ |

Para representar una función se forma una tabla con algunos de sus valores. Después, tomando esos pares de valores como puntos se representan en unos ejes de coordenadas.

En ocasiones, también tiene sentido unir los puntos obtenidos.

### EJEMPLO

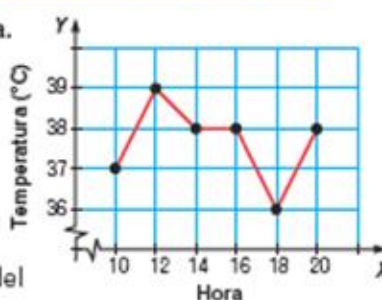
- 16 Cristina está enferma. Su madre le ha tomado la temperatura cada dos horas y ha anotado los resultados en una tabla.

| Variable x (hora)              | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|--------------------------------|----|----|----|----|----|----|
| Variable y (temperatura en °C) | 37 | 39 | 38 | 38 | 36 | 38 |

Representa los resultados en una gráfica.

Los puntos a partir de la tabla son:  
(10, 37), (12, 39), (14, 38), (16, 38),  
(18, 36) y (20, 38)

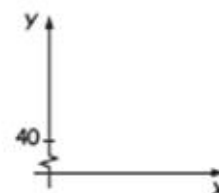
Representamos estos puntos en un sistema de coordenadas y los unimos mediante rectas. En este caso tiene sentido unirlos porque a cada momento del día (hora) le corresponde una temperatura.



### RECUERDA

Una magnitud es cualquier característica que se puede medir y expresar mediante una cantidad o un número.

Quando los valores que toma una de las magnitudes de la tabla son demasiado grandes, para representar sus puntos sobre los ejes se hace de esta forma:



Esto significa que en el eje Y, por debajo de 40, hay una parte de eje de la que hemos prescindido.



## 3.-CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función es una relación entre dos variables numéricas,  $x$  e  $y$ , de manera que a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .

La variable  $x$  es la variable independiente, y es un valor prefijado; y la variable  $y$  es la variable dependiente, y su valor depende del valor de  $x$ .

### EJEMPLOS

- 2 Comprueba si la variación de la temperatura máxima, en  $^{\circ}\text{C}$ , desde el día 15 al 25 de diciembre, anotada en la siguiente tabla, es una función.

| Días ( $x$ )        | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Temperatura ( $y$ ) | 16 | 10 | 12 | 24 | 20 | 16 | 14 | 18 | 20 | 18 | 20 |

A cada valor de la variable  $x$  (días) le corresponde un único valor de la variable  $y$  (temperatura). En cada día, la temperatura máxima es única.

La relación entre las variables  $x$  (días) e  $y$  (temperatura) es una función.

- 1 Una entrada de cine cuesta 8 €. La relación entre el número de entradas de cine y su precio, ¿es una función?

Comprobamos si a cada número de entradas le corresponde un único precio.

$$1 \text{ entrada} \longrightarrow 8 \text{ €}$$

$$2 \text{ entradas} \rightarrow 2 \cdot 8 = 16 \text{ €}$$

$$3 \text{ entradas} \rightarrow 3 \cdot 8 = 24 \text{ €}$$

$$4 \text{ entradas} \rightarrow 4 \cdot 8 = 32 \text{ €}$$

Como a cada valor de la variable  $x$  (número de entradas) le corresponde un único valor de la variable  $y$  (precio), la relación entre las variables  $x$  (número de entradas) e  $y$  (precio) es una función.

## 4.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

### Representación gráfica a partir de una tabla de valores

#### ANTES, DEBES SABER...

##### Cómo se construye una tabla numérica

Para construir una tabla, partimos de unos datos y obtenemos otros que cumplen una condición.

| Número    | 1               | 2               | 3               | 4                |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| Su triple | $1 \cdot 3 = 3$ | $2 \cdot 3 = 6$ | $3 \cdot 3 = 9$ | $4 \cdot 3 = 12$ |

Para representar gráficamente una función expresada mediante una tabla de valores, identificamos la variable independiente y la variable dependiente.

Con los valores prefijados de la variable independiente,  $x$ , obtenemos los correspondientes valores de la variable dependiente,  $y$ .

#### EJEMPLO

- 4 Una tienda ofrece un modelo de teléfono móvil por 45 € la unidad. La tabla muestra el precio de los móviles según la cantidad de ellos que se compre.

| N.º de móviles | 1  | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   |
|----------------|----|----|-----|-----|-----|-----|
| Precio (€)     | 45 | 90 | 135 | 180 | 225 | 270 |

Representa la gráfica de la función. ¿Se pueden unir los puntos?

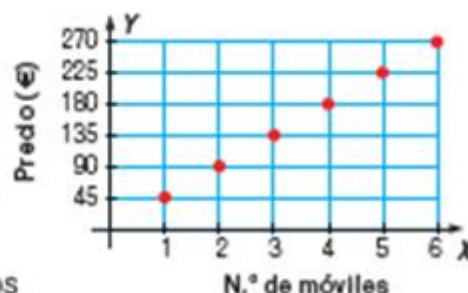
A partir de la tabla tenemos que:

1 móvil cuesta 45 €, 2 costarán 90 €, 3 costarán 135 €...

Representamos estos pares de valores en un sistema de coordenadas, y obtenemos la gráfica de la función.

La variable independiente, *número de móviles*, se representa en el eje de abscisas, eje  $X$ , y la variable dependiente, *precio*, en el eje de ordenadas, eje  $Y$ .

No unimos los puntos, porque no podemos comprar 1,5 móviles o 2,3 móviles.



## Representación gráfica a partir de una expresión algebraica

La expresión algebraica de una función se escribe como  $y = f(x)$  y se llama ecuación de la función.

A partir de la ecuación obtenemos la tabla de valores. Para obtener el valor de  $y$ , damos valores a  $x$  y operamos. Así, si  $a$  es un valor de la variable independiente, el valor correspondiente de la variable dependiente es  $f(a)$ .

### ANTES, DEBES SABER...

#### Qué es el valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio  $P(x)$ , para  $x = a$ , lo expresamos como  $P(a)$  y se obtiene sustituyendo  $x$  por el valor  $a$  en el polinomio y operando.

$$P(x) = 5x^3 + 2x - 4 \xrightarrow{x=2} P(2) = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 4 = 40$$

### EJEMPLO

- 5 Escribe la expresión algebraica de la función que a cada número le hace corresponder su doble menos una unidad, y representa su gráfica.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ 2 \rightarrow 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow \text{En general, } x \rightarrow 2 \cdot x - 1$$

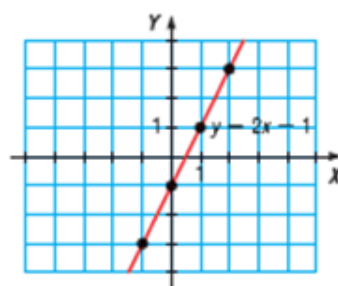
Por tanto, la expresión algebraica es  $y = 2x - 1$ , es decir,  $f(x) = 2x - 1$ .

Elaboramos la tabla de valores y la gráfica correspondiente:

| Valor de $x$ | $y = f(x)$                               | $x$ | $y$ |
|--------------|------------------------------------------|-----|-----|
| -1           | $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$ | -1  | -3  |
| 0            | $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$      | 0   | -1  |
| 1            | $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$       | 1   | 1   |
| 2            | $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$       | 2   | 3   |

Representando estos puntos obtenemos la gráfica de la función.

En este caso, es posible unir los puntos porque se puede calcular el doble menos una unidad de cualquier número, aunque no sea entero.



La expresión de la función que a cada número le asocia su doble se puede escribir de cualquiera de estas maneras:

$$y = 2x$$

$$f(x) = 2x$$

$$y = f(x) = 2x$$

Y su valor para  $x = 3$ :

$$f(3) = 2 \cdot 3$$

$$y = f(3) = 2 \cdot 3$$

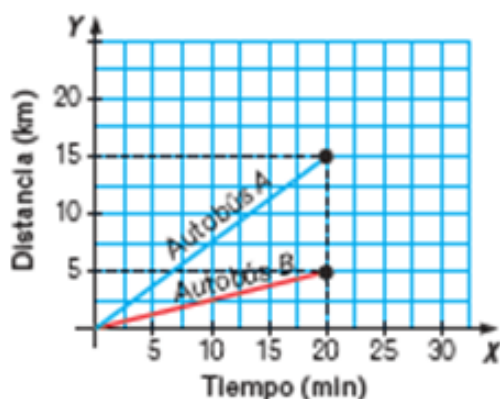


## 5.-INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Interpretar una gráfica es extraer información de ella a través de su estudio, de izquierda a derecha.

### EJEMPLOS

- 17** Interpreta esta gráfica, que representa el tiempo empleado por dos autobuses en realizar una vez su trayecto.



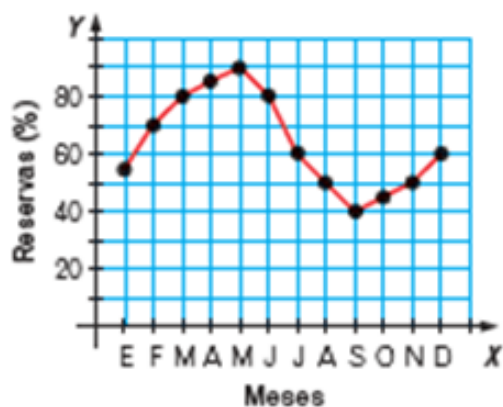
Los autobuses A y B están a la misma distancia del eje vertical, y tardan lo mismo en realizar su trayecto, 20 minutos. Sin embargo, el autobús A está más alejado del eje horizontal que el autobús B.

Es decir, el autobús A recorre más distancia, 15 km, que el autobús B, que recorre 5 km.

- 18** Interpreta esta gráfica, que representa las reservas de agua de un pantano durante el último año.

Las reservas de agua del pantano crecen durante el invierno y alcanzan su punto máximo en la primavera, en el mes de mayo.

Las reservas decrecen durante el verano, desde mayo hasta septiembre, llegando a su punto mínimo durante el mes de septiembre. A partir de este punto, las reservas del pantano vuelven a crecer hasta situarse en diciembre a un nivel similar con el que comenzó el año.



Al representar mediante gráficas la información extraída de un enunciado, debemos tener en cuenta los puntos que pertenecen a dicha gráfica y si estos se pueden unir o no.

## EJEMPLOS

- 19** Representa este enunciado mediante una gráfica, y decide si es posible unir los puntos que obtienes o no.

*El número de clientes de un restaurante durante la semana ha sido: el primer día 20 clientes, el segundo y el tercero 30 clientes cada día, el cuarto el mismo número de clientes que el primero. El quinto día cerraron por descanso, y el fin de semana solo hubo 10 clientes cada día.*

No tiene sentido unir los puntos, ya que no podemos afirmar que en cierto momento hubo 10,5 clientes o 12,33 clientes.

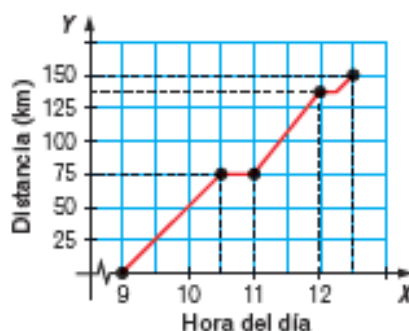


- 20** Representa este enunciado mediante una gráfica.

*El domingo fuimos a la casa de mis abuelos, que está situada a 150 km.*

*Partimos a las 9:00 h y a las 10:30 h paramos a desayunar durante media hora.*

*A las 12:00 h entramos en la ciudad, y nos detuvimos a hablar con un amigo. Llegamos finalmente a la casa de mis abuelos a las 12:30 h.*



En este caso hay que unir los puntos porque se puede determinar, por ejemplo, a qué distancia se encontraban a las 11:30 h.

No siempre se pueden unir los puntos de una gráfica.



Pero además, a la hora de interpretar la gráfica de una función también nos podemos apoyar en otros conceptos como la continuidad, el crecimiento o decrecimiento.... Veámoslos:

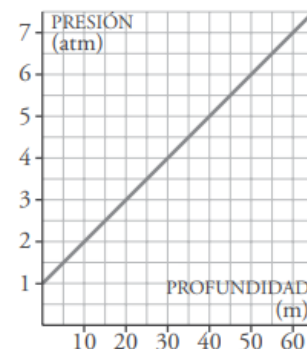
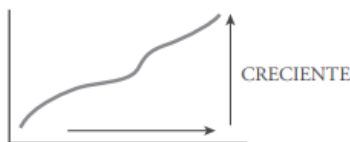
## 5.1.- Crecimiento y decrecimiento

- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).

Esta gráfica corresponde a la función:

*profundidad dentro del agua*  $\rightarrow$  *presión*

Esta función es **creciente**, pues a más profundidad más presión.

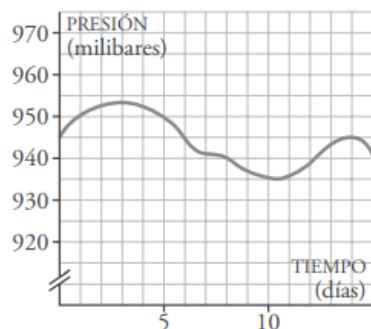
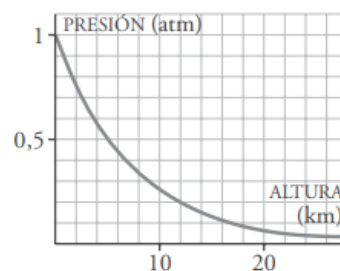


- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.

Esta gráfica corresponde a la función:

*altura sobre el nivel del mar*  $\rightarrow$  *presión*

Es una función **decreciente**, pues a más altura menos presión.



- La variación de la presión atmosférica en un lugar es indicio importante de cambios en la meteorología (de ahí lo del *parte meteorológico, centro de altas presiones, isobaras*, etc.).

La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

*instante de tiempo*  $\rightarrow$  *presión*

La función presenta tramos en los que es **creciente** y tramos en los que es **decreciente**.

Para estudiar las variaciones de una función *hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha*; es decir, hemos de ver cómo varía la  $y$  cuando  $x$  aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente,  $x$ , aumenta la variable dependiente,  $y$ .

Una función es **decreciente** cuando al aumentar  $x$  disminuye  $y$ .

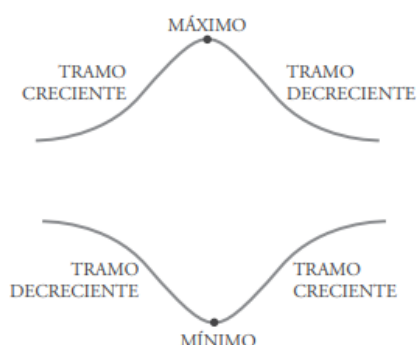
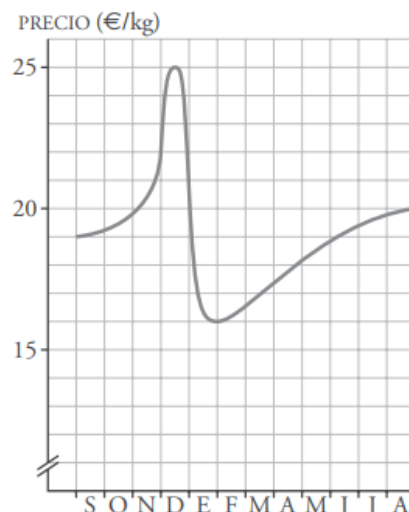
También podemos decir que **un tramo** de una función es **creciente** o **decreciente**.

## 5.2.- Máximos y mínimos

La gráfica adjunta describe el precio de la carne de cordero lechal a lo largo de un año (de septiembre a final de agosto). Corresponde a la función:

$$\text{tiempo} \rightarrow \text{precio}$$

La gráfica presenta un **tramo creciente** de septiembre a diciembre. A partir de aquí, hay un **tramo decreciente** hasta mediados de enero y vuelve a crecer suavemente hasta el final de agosto. Se aprecian claramente un **máximo** de 25 €/kg a mediados de diciembre y un **mínimo** de 16 €/kg a finales de enero.



Una función tiene un **máximo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

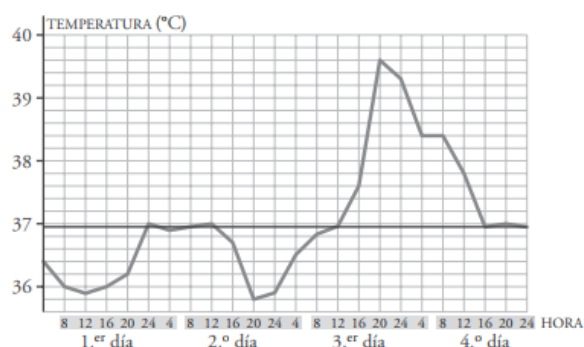
A la izquierda del máximo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

### Actividades

- 1 La gráfica siguiente refleja la temperatura de un enfermo durante cuatro días:



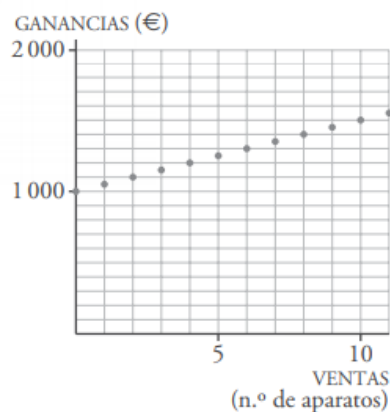
- a) Desde las 12 h a las 24 h del 1.º día hay un *tramo creciente*. Describe otro tramo en el que la función sea creciente.

- b) Describe dos tramos en los que la función sea *decreciente*.
- c) Señala el *máximo*, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.
- d) Señala el *mínimo*, indicando el momento y la temperatura.

- 2 En unos ejes cartesianos representados sobre papel cuadriculado, representa una función definida en el intervalo 2-10 que sea creciente en todo el tramo.

- 3 Representa una función definida en el intervalo 0-12 que tenga un mínimo en el punto (3, 2) y un máximo en (7, 8). Describe un tramo creciente y un tramo decreciente.

## 5.3.-Discontinuidades. Continuidad



- Un representante de ordenadores recibe cada mes 1 000 € fijos más 50 € por cada aparato vendido. A la izquierda tienes la gráfica de la función:

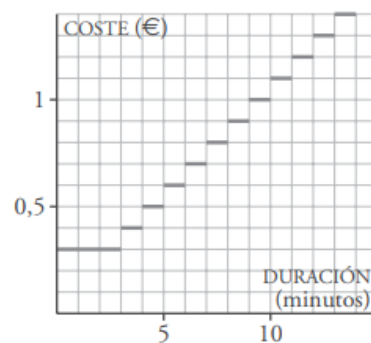
*aparatos vendidos* → *ganancias mensuales*

La variable independiente solo tiene sentido para los valores 0, 1, 2, 3, 4, ... y no para los intermedios, pues no se puede vender un número fraccionario de ordenadores. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.

- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar durante 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto o fracción cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

*duración* → *coste*

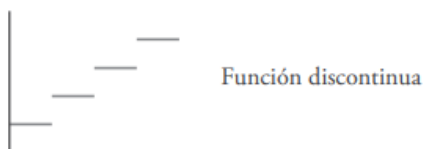
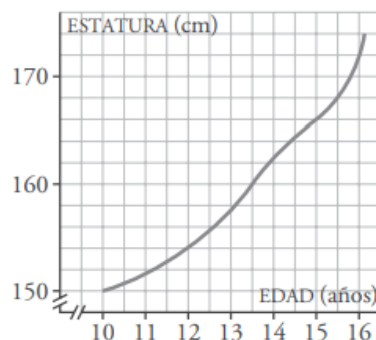
Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.



- Esta gráfica describe la estatura de un chico entre los 10 y los 16 años. Se trata de la función:

*edad* → *estatura*

La variación de la estatura es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua**.



Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel (tercera gráfica de la izquierda).

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo**, aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

### Actividades

- 1 El precio de una fotocopia es 0,10 €. Representa esta función:

*número de fotocopias* → *coste*

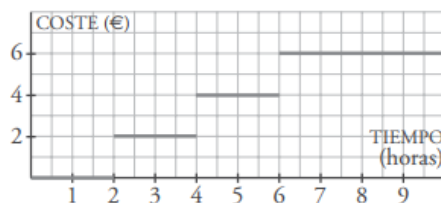
¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

- 2 La gráfica de la derecha muestra las tarifas del aparcamiento de un centro comercial.

a) ¿Cuánto pagamos si estamos 1 h?

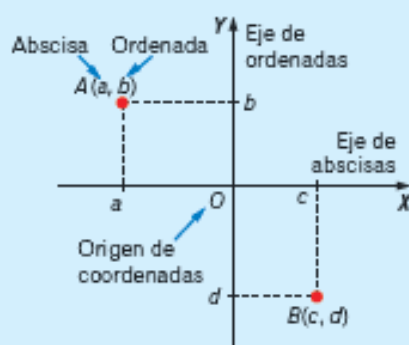
b) ¿Y si estamos 2 h y 30 min? ¿Y si estamos 8 h?

c) ¿Es una función continua?

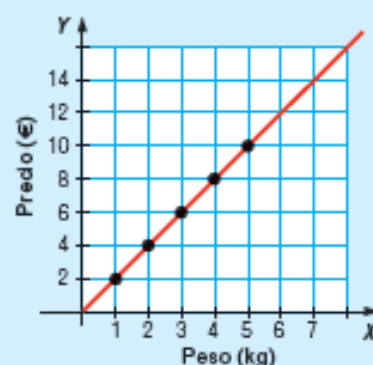


## COMPRENDE ESTAS PALABRAS

### Sistema de coordenadas cartesianas



### Funciones



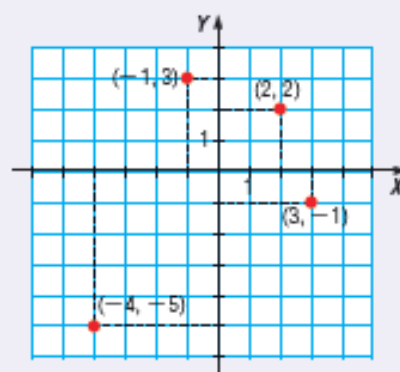
## HAZLO DE ESTA MANERA

### 1. REPRESENTAR PUNTOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Representa los puntos:  $(-1, 3)$ ,  $(3, -1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(-4, -5)$ .

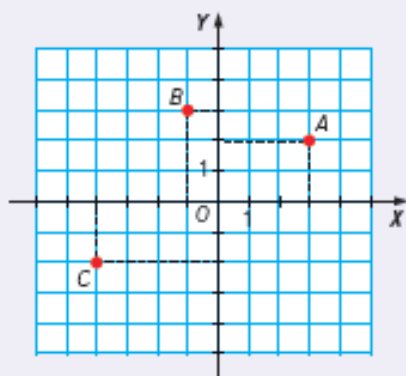
**PRIMERO.** En el eje horizontal, y partiendo del origen de coordenadas, nos desplazamos tantas unidades como nos indique la primera coordenada del punto. Hacia la derecha, si es positiva, o hacia la izquierda, si es negativa.

**SEGUNDO.** Desde ese punto, nos desplazamos tantas unidades como nos indique la segunda coordenada del punto. Hacia arriba, si es positiva, o hacia abajo, si es negativa.



### 2. CALCULAR LAS COORDENADAS DE UN PUNTO REPRESENTADO EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Determina las coordenadas de estos puntos.



**PRIMERO.** Trazamos una recta perpendicular al eje  $X$  que pase por el punto. El punto de corte de esta recta con el eje  $X$  es la primera coordenada del punto.

**SEGUNDO.** Trazamos una recta perpendicular al eje  $Y$  que pase por el punto. El punto de corte de esta recta con el eje  $Y$  es la segunda coordenada del punto.

Los puntos representados son:  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, 3)$  y  $C(-4, -2)$ .

| Punto | Primera coordenada |
|-------|--------------------|
| A     | 3                  |
| B     | -1                 |
| C     | -4                 |

| Punto | Segunda coordenada |
|-------|--------------------|
| A     | 2                  |
| B     | 3                  |
| C     | -2                 |



## 1. REPRESENTAR UNA GRÁFICA A PARTIR DE UNA TABLA

La tabla relaciona cada número con su doble.

| Número   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|---|---|---|---|
| Su doble | 2 | 4 | 6 | 8 |

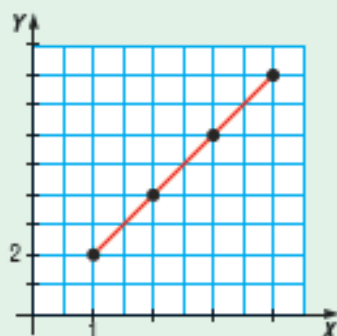
Representa los datos en una gráfica.

**PRIMERO.** A partir de la tabla obtenemos los puntos que definen la función.

Los puntos que obtenemos a partir de la tabla son:

(1, 2) (2, 4) (3, 6) (4, 8)

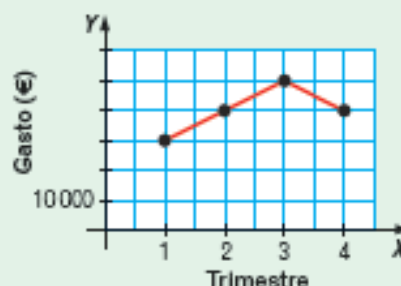
**SEGUNDO.** Representamos estos puntos en un sistema de coordenadas y decidimos si los podemos unir.



En este caso los podemos unir ya que a cualquier número le podemos hacer corresponder su doble.

## 2. INTERPRETAR GRÁFICAS

Interpreta esta gráfica que muestra el gasto de agua por trimestres de una familia.



**PRIMERO.** Analizamos cómo se modifican los datos en los distintos tramos de la gráfica. Durante el primer trimestre del año la familia llega a consumir 30 000 litros de agua. Y sigue aumentando su consumo hasta el tercer trimestre. Durante el último trimestre el consumo disminuye.

**SEGUNDO.** Identificamos los datos donde se producen los mayores o menores resultados.

En el paso del tercer al cuarto trimestre se produce el punto de máximo consumo de agua, 50 000 litros. El consumo ha ido aumentando hasta que en ese punto comienza a disminuir.

**ATENCIÓN:** Si consideras que necesitas realizar más ejercicios relacionados con este apartado de “conceptos previos” realiza los ejercicios enviados por la profesora a tu correo electrónico. En breve, también enviará las soluciones de los mismos.

## 6.- LA FUNCIÓN LINEAL

La bicicleta de Elena avanza 100 cm por cada vuelta de las ruedas. Si se quiere conocer la distancia que recorre en función del número de vueltas de las ruedas, se elabora la tabla de valores correspondiente. Así se obtiene:

| Número de vueltas        | 1   | 2   | 2,5 | 3   | 4   | 4,5 | 5   | 6   | 6,5 |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Distancia recorrida (cm) | 100 | 200 | 250 | 300 | 400 | 450 | 500 | 600 | 650 |

La distancia recorrida y el número de vueltas de las ruedas son dos magnitudes directamente proporcionales porque el cociente

$$\frac{\text{«distancia recorrida»}}{\text{«número de vueltas»}}$$

es constante. La constante de proporcionalidad es 100.

Esta relación de proporcionalidad directa se puede expresar mediante una función en la que la variable independiente  $x$  es el número de vueltas que dan las ruedas y la variable dependiente  $y$  es la distancia recorrida.

La función es  $y = 100x$



La gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

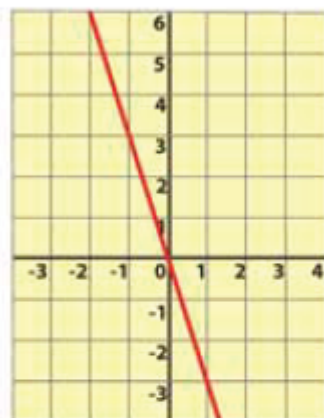
Las relaciones de proporcionalidad directa entre dos magnitudes  $x$  e  $y$  se pueden expresar como funciones de expresión algebraica  $y = mx$ .

Se llaman **funciones lineales**.

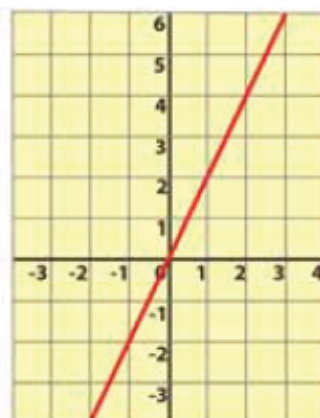
La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

# CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN LINEAL

La gráfica de la función lineal  $y = mx$  es una recta que pasa por el origen de coordenadas.



$$y = -3x$$



$$y = 2x$$

Las gráficas de las funciones  $y = -3x$  e  $y = 2x$  son rectas que pasan por el origen de coordenadas. En los dos casos la variable independiente y la variable dependiente toman cualquier valor. Por tanto, el dominio y el recorrido son todos los números, es decir, toda la recta numérica.

Las funciones lineales son **continuas**.

En la gráfica de la función  $y = -3x$  se observa que al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente, es decir,  $y = -3x$  es una **función decreciente**.

En la función  $y = 2x$ , al aumentar el valor de la variable independiente aumenta el valor de la variable dependiente, es decir,  $y = 2x$  es una **función creciente**.

Si  $f(x) = -3x$  y  $g(x) = 2x$ , obtenemos:

$$f(-x) = (-3) \cdot (-x) = 3x = -f(x)$$

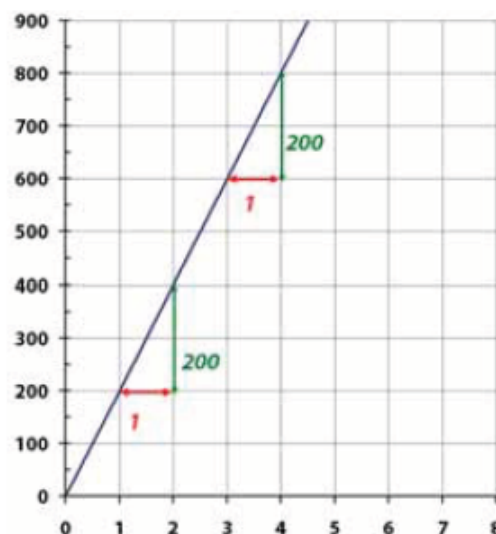
$$g(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x = -g(x)$$

Ambas son funciones **impares o simétricas respecto del origen de coordenadas**.

En la función lineal  $y = mx$ , el coeficiente  $m$  se llama **pendiente**. Expresa el aumento o disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente.

En la función  $y = -3x$ , la pendiente es  $-3$ . Por cada unidad de la variable independiente, la variable dependiente disminuye 3 unidades.

En la función  $y = 2x$ , la pendiente es  $2$ . Por cada unidad de la variable  $x$ , la variable  $y$  aumenta 2 unidades.



## 7.- LA FUNCIÓN AFÍN

En el recibo del consumo de agua mensual de una casa aparecen los precios de los siguientes conceptos:

- Por distribución, depuración y otros conceptos: 10 €.
- Por  $\text{m}^3$  de agua consumida: 3 €.

Si queremos conocer la factura en función de los metros cúbicos de agua consumida, elaboramos la tabla de valores:

|                                         |    |    |    |    |    |     |           |
|-----------------------------------------|----|----|----|----|----|-----|-----------|
| <b>Metros cúbicos de agua consumida</b> | 1  | 3  | 5  | 10 | 15 | ... | $x$       |
| <b>Precios de la factura sin IVA</b>    | 13 | 19 | 25 | 40 | 55 | ... | $3x + 10$ |

La relación entre los  $\text{m}^3$  de agua consumida ( $x$ ) y el precio de la factura ( $y$ ) se puede expresar mediante la función  $y = 3x + 10$ , cuya gráfica es:



La gráfica de la función es una recta que pasa por el punto de coordenadas  $(0, 10)$ . La pendiente de la recta es 3. La imagen de 0 es 10. A este valor se le llama ordenada en el origen.

Las funciones cuya expresión algebraica es  $y = mx + n$ ,  $n \neq 0$  se llaman **funciones afines**.

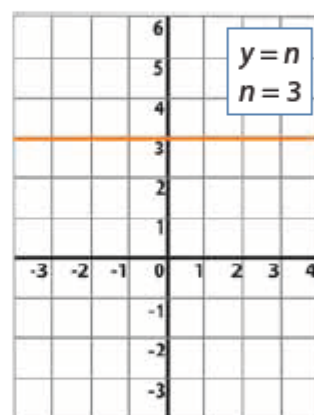
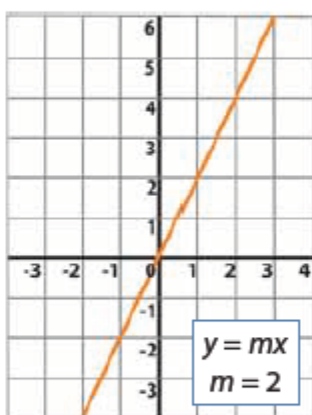
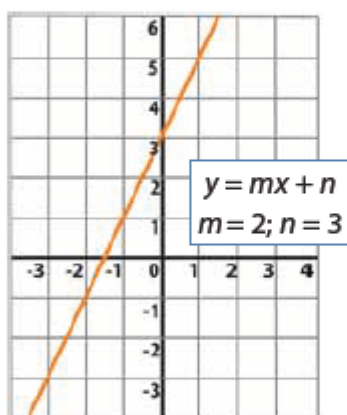
Su gráfica es una recta que pasa por el punto de coordenadas  $(0, n)$ . El coeficiente  $m$  representa la **inclinación** o **pendiente** de la recta.

## 8.- ECUACIÓN DE LA RECTA

Las gráficas de la función lineal y afín son rectas. La expresión algebraica de la función afín  $y = mx + n$  es la que se utiliza en general como ecuación de una recta.

Si la ordenada en el origen es  $n = 0$ , la ecuación  $y = mx$  representa una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Si la pendiente es  $m = 0$ , la ecuación  $y = n$  representa una recta horizontal que pasa por el punto de coordenadas  $(0, n)$ .



La ecuación de la recta en el plano es  $y = mx + n$ .

La pendiente de la recta es  $m$ .

La ordenada en el origen de coordenadas es  $n$ .

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas también representa una recta.

### Ejemplo 1

En la ecuación  $2x + 3y = 5$ , si se despeja  $y$  en función de  $x$  se transforma en  $y = mx + n$ .

$$2x + 3y = 5 \Leftrightarrow 3y = -2x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

La pendiente de la recta es  $m = -\frac{2}{3}$ .

La ordenada en el origen es  $n = \frac{5}{3}$ .

## 9.- OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Una recta queda determinada por dos puntos o por un punto y su pendiente. La obtención de su ecuación en cada caso se realiza teniendo en cuenta la expresión algebraica  $y = mx + n$ .

### ECUACIÓN DE LA RECTA SI SE CONOCEN LAS COORDENADAS DE UN PUNTO Y SU PENDIENTE

#### Ejemplo 2

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (2, 4) y tiene pendiente 3.

En la ecuación  $y = mx + n$  se conoce la pendiente  $m = 3$ , por tanto la ecuación es:  $y = 3x + n$ .

Como la recta pasa por el punto (2, 4), las coordenadas del punto cumplen la ecuación, es decir,  $4 = 3 \cdot 2 + n$ . Despejando  $n$  se tiene que  $n = -2$ .

La ecuación de la recta es  $y = 3x - 2$ .

### ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

#### Ejemplo 3

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (-2, -1) y (1, -7).

Se considera la ecuación de la recta  $y = mx + n$ . Los puntos (-2, -1) y (1, -7) pertenecen a la misma, por tanto, cumplirán la ecuación.

$$\begin{cases} -1 = -2m + n \\ -7 = m + n \end{cases}$$

Se resuelve el sistema para obtener el valor de  $m$  y  $n$ .

$$\begin{cases} n = -1 + 2m \\ n = -7 - m \end{cases} \Leftrightarrow -1 + 2m = -7 - m \Leftrightarrow 6 = -3m \Leftrightarrow m = -2$$

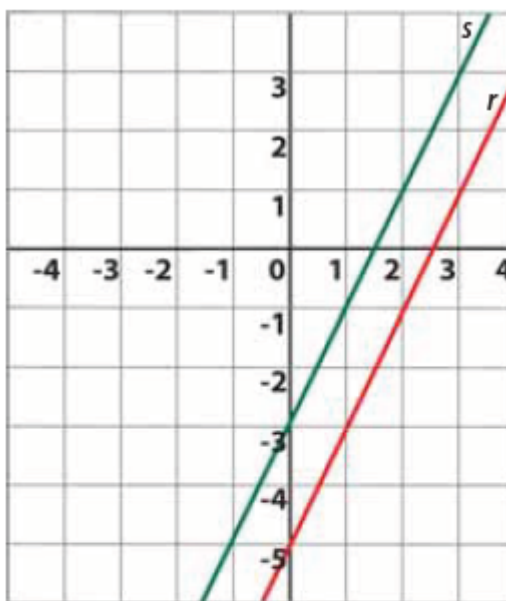
Si  $m = -2$ , sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones se obtiene que  $n = -5$ .

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados es:

$$y = -2x - 5$$

## 10.- RECTAS PARALELAS

Si representamos las rectas utilizando un sistema de coordenadas cartesianas se comprueba que las rectas son paralelas.



Si las ecuaciones de las rectas  $r$  y  $s$  se expresan en la forma  $y = mx + n$ , se comprueba que tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

$$r: 2x - y = 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

$$s: 4x - 2y = 6 \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Es decir, para que dos rectas sean paralelas, NECESARIAMENTE sus pendientes DEBEN ser del mismo valor y tener una ordenada en el origen diferente.

## 11.- LA QUÍMICA EN LA SOCIEDAD

Algunos productos químicos como el amoníaco, ácido sulfúrico, dióxido de carbono... tiene gran importancia económica, bien porque se emplean directamente en alguna aplicación, bien porque se usan para la obtención de productos de mayor interés económico (medicamentos, plásticos...). Esto ha motivado el desarrollo de la industria química que se inició en el siglo XVIII y que se ha convertido en uno de los motores de la economía mundial.

La industria química la podemos agrupar en tres sectores:

**Química básica.** Comprende la producción, a partir de materias primas naturales, de sustancias químicas que se utilizan directamente en la fabricación de otras sustancias finales: amoníaco y otros fertilizantes, ácido sulfúrico, etileno...

**Química para la industria** y el consumo final. Parte de los productos que se obtienen en la industria química básica para obtener sustancias que se utilizan en otras industrias como la del automóvil o que tienen utilidad práctica propia: pinturas, esmaltes, detergentes....

**Química de la salud.** Comprende la producción de medicamentos y de productos fitosanitarios y zoonosanitarios.

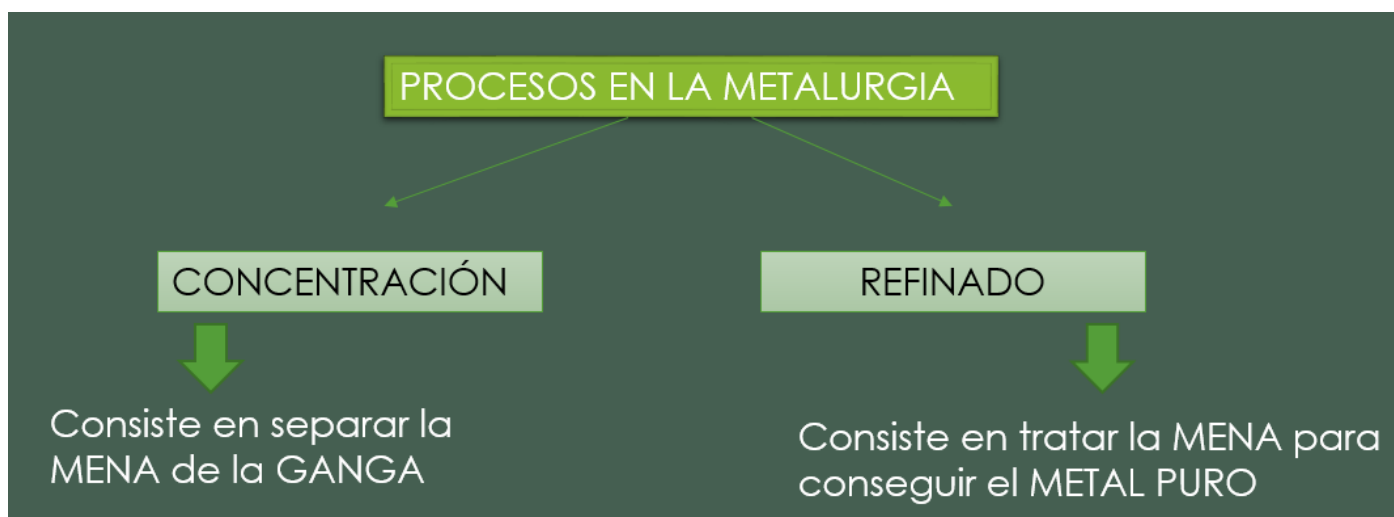
Pero la actividad industrial está relacionado con **tres problemas medioambientales** importantes: la lluvia ácida, el incremento del efecto invernadero y el agujero de la capa de ozono. Todos ellos consecuencia de las emisiones gaseosas de las que la industria no es la única responsable, aunque sí constituye una parte importante del problema.

## 11.1.- QUÍMICA BÁSICA:

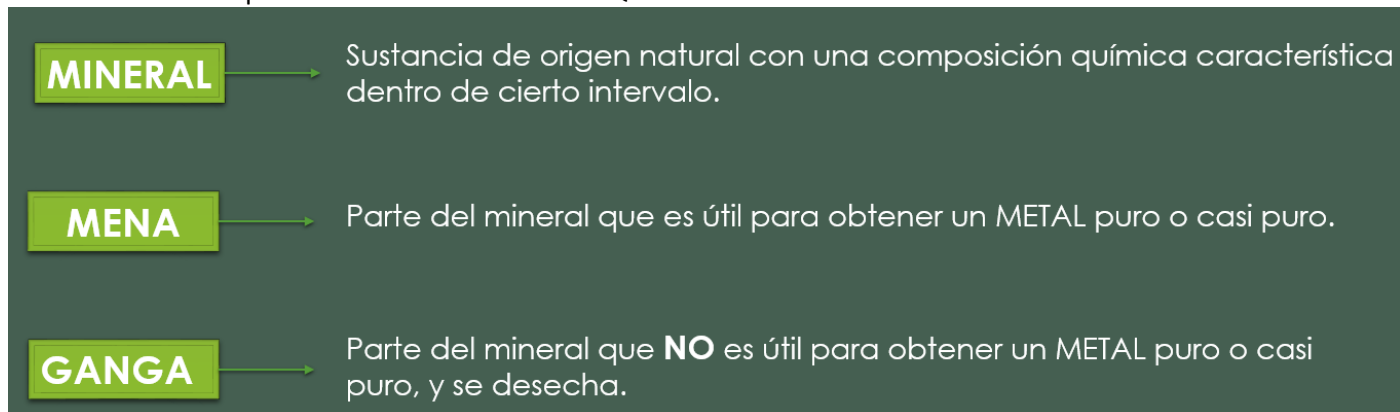
### A) METALURGIA:

Podemos definir la METALURGIA como la ciencia aplicada cuyo objeto es el estudio de las operaciones industriales tendientes a la extracción, preparación, tratamiento (físico y/o químico) y producción de metales y sus aleaciones. Separación de los metales.

Durante su desarrollo, se pueden diferenciar principalmente dos procesos: concentración y refinado.



Antes de proceder a estudiar cómo se realiza la obtención de un metal cualquiera, es importante diferenciar tres conceptos clave: MENA, GANGA Y MINERAL.



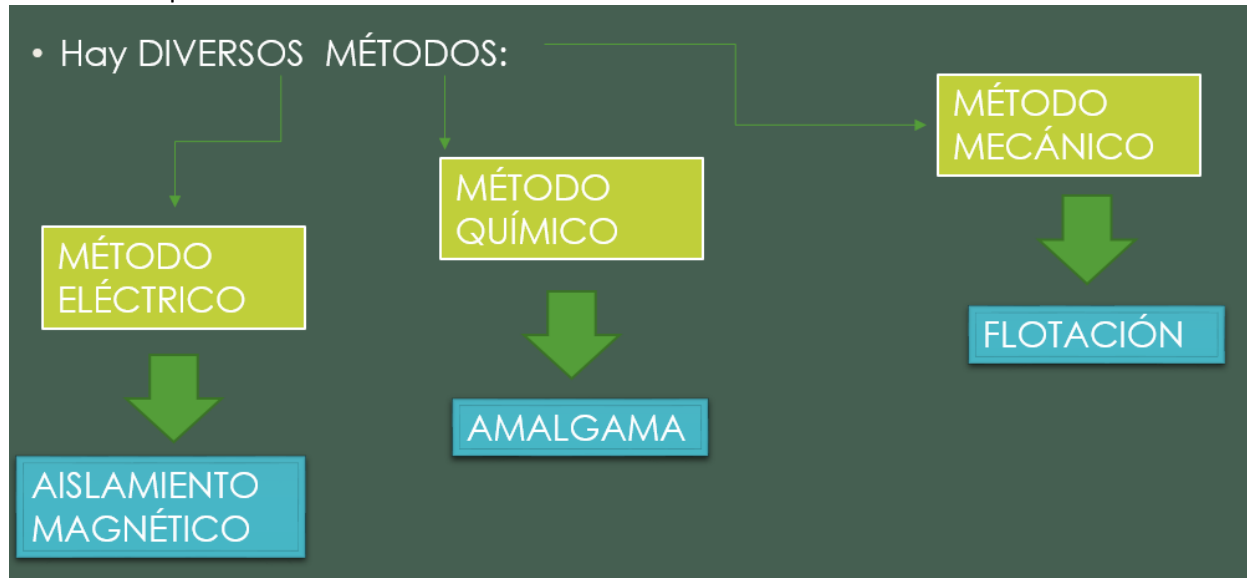
Para obtener el METAL se siguen los siguientes pasos:

- 1.- **CONCENTRACIÓN**: Es la separación de la mayor parte de la GANGA que acompaña al mineral.
- 2.- **PREPARACIÓN QUÍMICA**: El mineral se prepara para la siguiente etapa por medio de la **TOSTACIÓN** o de la **CALCINACIÓN**.
- 3.- **REFINADO o REDUCCIÓN**: Operación en la que la MENA es tratada para obtener el metal puro o casi puro. Como el tratamiento en **ALTOS HORNOS** para obtener el hierro y sus aleaciones.

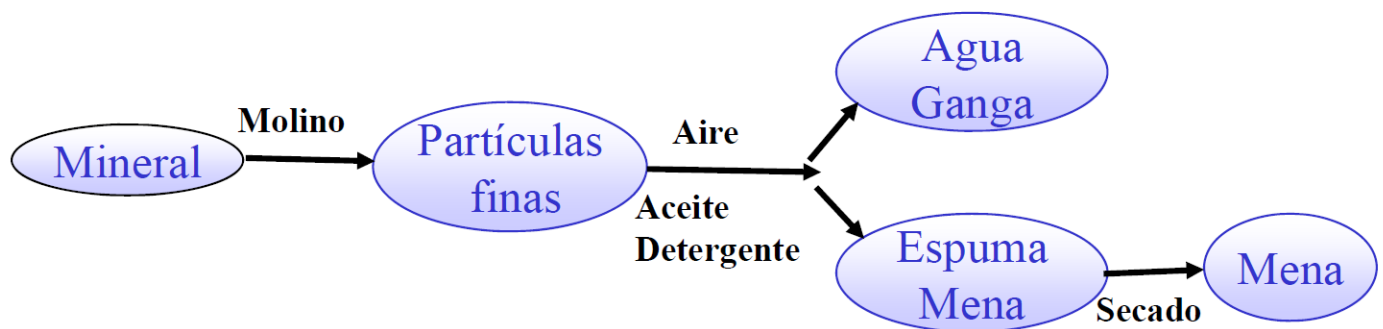


#### PROCESO DE CONCENTRACIÓN:

Ya se ha expuesto que este proceso consiste en la separación de la mena y la ganga. Existen diferentes formas de proceder para realizar esta separación, que será en función del mineral del que se parta.



Pero la FLOTACIÓN constituye el principal proceso de concentración de los minerales, que busca enriquecer las especies mineralógicas útiles de una mena mediante la eliminación de las especies o materiales sin valor. Normalmente los sólidos no flotan en el agua, así que se añaden a ésta sustancias que favorecen la flotabilidad, especialmente detergentes que forman espumas y que arrastran hacia la superficie los sólidos y los separan. Como la ganga normalmente es menos densa que la mena, al añadir detergentes al agua se consigue que flote, dejando la mena en el fondo. Después, claro, habrá que proceder al secado de la mena.



## B) ÁCIDO SULFÚRICO:

El ácido sulfúrico, de fórmula  $H_2SO_4$  es un ácido fuerte, muy corrosivo, líquido, soluble en agua, que hierve a  $340\text{ }^{\circ}C$  y congela a  $10.8\text{ }^{\circ}C$ .

Se emplea para la fabricación de abonos, de superfosfatos, de detergentes, de fibras sintéticas, pinturas, baterías de automóviles, refinado de metales y de petróleo etc.

Métodos para obtenerlo:

Método de las cámaras de plomo: Obtención de ácido sulfúrico con un 65% de pureza

**Método de contacto: proceso catalizado por platino y vanadio. 98% de pureza.**

### **C) AMONIACO:**

El amoníaco, de fórmula  $\text{NH}_3$  es un gas de olor picante, que hierve a  $-33^\circ\text{C}$  y congela a  $-78^\circ\text{C}$ . Normalmente se encuentra en disolución acuosa al 30 o 40 %.

Se emplea: en la limpieza doméstica, como fertilizante o para la obtención de ácido nítrico ( $\text{HNO}_3$ ).

Industrialmente el amoníaco se obtiene mediante el método de Bosch - Haber, en el que se mezclan nitrógeno e hidrógeno, a más de 200 atm de presión y  $200^\circ\text{C}$  de temperatura, en presencia de un catalizador que contiene hierro.

### **D) QUÍMICA Y MEDIO AMBIENTE:**

La explotación de los recursos naturales, la obtención de energía, la transformación de las materias primas en productos elaborados, su distribución y comercialización conllevan un proceso de vertido de productos químicos al medioambiente. Y esos productos producen contaminación.

La mayoría de los vertidos contienen sustancias químicas muy activas: Metales pesados, plásticos, detergentes, blanqueantes, etc. Que suponen un grave riesgo para la flora y la fauna y, directamente o a través de la cadena alimenticia, para los seres humanos.

Las aguas son contaminadas por vertidos industriales, aguas residuales de las poblaciones, petróleo procedente de los vertidos accidentales y pesticidas y fertilizantes agrícolas así como el agua caliente procedente de la industria. Como nitratos (enfermedades mortales) y metales pesados (envenenamiento crónico).

El aire se ve afectado por los gases y humos de las industrias, hogares y medios de transporte. Como el dióxido de carbono y monóxido de carbono.

### **E) PRINCIPALES PROBLEMAS MEDIOAMBIENTALES:**

#### **➤ LLUVIA ÁCIDA:**

El dióxido de azufre y de diversos óxidos de nitrógeno (producidos por los combustibles fósiles) con la luz y el vapor de agua se transforman en ácido sulfúrico y en ácido nítrico estos caen con la lluvia.

Producen:

Ataca las estructuras metálicas y de cemento

Daños directos sobre las hojas y raíces de las plantas

Los ácidos que se producen son ácido sulfúrico y ácido nítrico,  $\text{H}_2\text{SO}_4$  y  $\text{HNO}_3$ . Proceden del empleo de combustibles fósiles, carbón, petróleo... Las reacciones de combustión producen cantidades grandes de  $\text{SO}_2$  y de  $\text{NO}$ , éstos productos por la acción de la luz se transforman en otros óxidos,  $\text{SO}_3$  y  $\text{NO}_2$ , susceptibles de convertirse en ácido sulfúrico y ácido nítrico por la acción del agua presente en la atmósfera.

### ➤ EFECTO INVERNADERO:

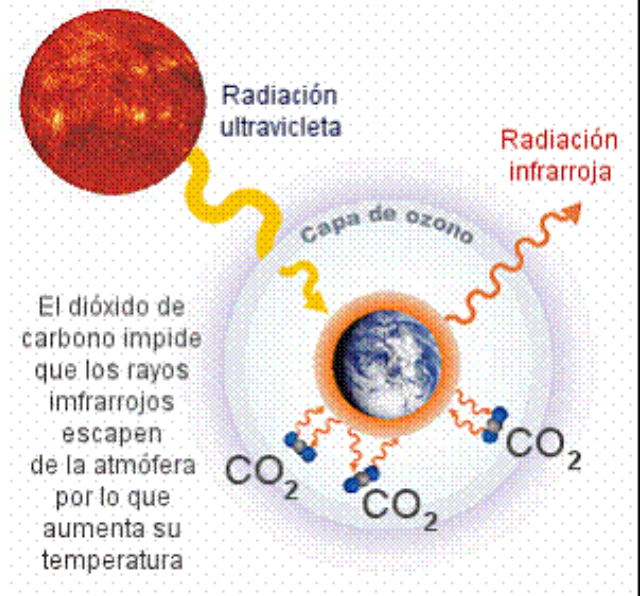
El dióxido de carbono es causante del efecto invernadero.

La Tierra recibe su calor del Sol y, parte de él, lo emite al espacio exterior, en forma de radiación infrarroja.

El dióxido de carbono impide que esa radiación infrarroja escape al espacio, por lo que calienta la atmósfera y, con ella, la Tierra.

Puede tener efectos desastrosos:

- Cambio climático y transformación en los ecosistemas.
- Aumento de unos pocos grados en la temperatura de la Tierra.
- Fusión de los hielos de los casquetes polares.
- Ascenso del nivel del mar varios metros, inundando las ciudades costeras.



### ➤ AGUJERO DE LA CAPA DE OZONO:



La capa de ozono está situada entre 19 y los 48 Km de altura en la atmósfera. Se encarga de absorber la radiación ultravioleta más peligrosa.

A finales de los años 70 se descubrió que la capa de ozono estaba desapareciendo sobre la Antártida (agujero de ozono), producido por los compuestos clorofluorcarbonados (refrigerantes en neveras y aparatos de aire acondicionado y como propelentes en sprays)

La capa de ozono resulta esencial para muchos seres vivos, pues este gas filtra las radiaciones ultravioletas procedentes del Sol, que si llegan a la Tierra, pueden provocar cánceres de piel y otros

desórdenes.

## **11.2.- QUÍMICA de la SALUD:**

### **A) MEDICAMENTOS:**

*Son sustancias que se emplean para prevenir, combatir o disminuir los efectos de las enfermedades.*

*La mayoría son de origen vegetal o animal, algunos son de origen mineral y en la actualidad también de origen químico (aspirina y las sulfamidas).*

### **B) INGENIERÍA GENÉTICA:**

*Permite la alteración del material genético de un organismo, bien añadiendo bien quitando porciones al ADN del núcleo celular.*

*Se utiliza para:*

*\*la obtención de nuevos cultivos más resistentes a las plagas y enfermedades o con menores necesidades en cuanto a suelos o agua de riego.*

*\*En el campo de la medicina y la producción de medicamentos*

## **11.3.- QUÍMICA para la INDUSTRIA:**

### **A) FIBRAS:**

*Las fibras están formadas por moléculas de estructura alargada que forman largas cadenas muy estrechas que se enlazan unas con otras hasta formar hilos de un grosor inferior a 0.05 cm.*

*Pueden ser de: origen animal, origen vegetal U origen sintético (del petróleo)*

*Se emplea para: elaborar tejidos y prendas de vestir; aislantes térmicos para los astronautas; tejidos antibalas para soldados etc.*

### **B) PLÁSTICOS:**

*Los plásticos tienen una estructura molecular similar a las fibras, en su producción las largas cadenas se entremezclan formando láminas.*

Pueden moldearse con facilidad, son muy resistentes al ataque de productos químicos, impermeables, aislantes térmicos y eléctricos, y tenaces.

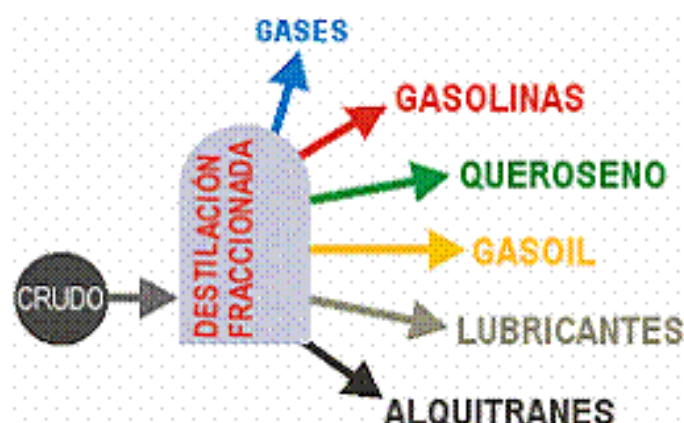
Se utilizan en la elaboración de recipientes, aislantes de cables eléctricos o para asas de utensilios de cocina.

Tipos: termoplásticos, elastómeros y termoestables.

### C) DETERGENTES:

Son moléculas largas uno de cuyos extremos es soluble en agua y el otro soluble en grasas. En agua forman pequeñas esferas y en el interior se sitúan las grasas y se eliminan de las superficies y tejidos, consiguiendo la limpieza. Se obtienen a partir de aceites y grasas animales y vegetales. Se utilizan como: agentes de limpieza o en minería para facilitar la flotación de ganga o mena

### D) COMBUSTIBLES Y ASFALTOS:



La petroquímica es la industria dedicada a obtener derivados químicos del petróleo y de los gases asociados. Los productos petroquímicos incluyen todas las sustancias químicas que de ahí se derivan.

La petroquímica, por lo tanto, aporta los conocimientos y mecanismos para la extracción de sustancias

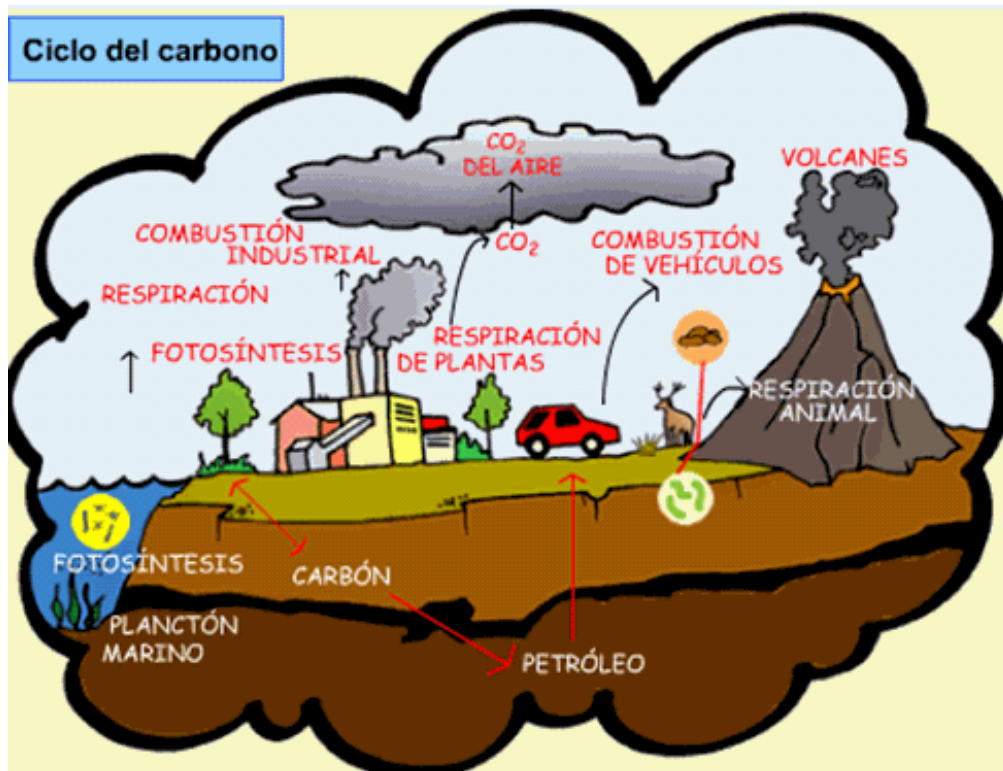
químicas a partir de los combustibles fósiles. La gasolina, el gasoil, el queroseno, el propano, el metano y el butano son algunos de los combustibles fósiles que permiten el desarrollo de productos de la petroquímica.

Esta ciencia también posibilita la producción de fertilizantes, pesticidas y herbicidas, la obtención de asfalto y fibras sintéticas y la fabricación de distintos plásticos. Los guantes, los borradores y las pinturas, entre muchos otros artículos de uso cotidiano, forman parte de la producción petroquímica.

Los procesos para la obtención de los productos petroquímicos se llevan a cabo en refinerías. El proceso básico, que divide al petróleo y al gas natural en diversos compuestos más ligeros, se conoce como cracking.

La destilación fraccionada es un proceso físico utilizado en química para separar mezclas de líquidos mediante el calor, y con un amplio intercambio calorífico y másico entre vapores y líquidos.

#### 11.4.- CICLO DEL CARBONO:



El ciclo del carbono es un ciclo biogeoquímico por el cual el carbono se intercambia entre la biosfera, la litosfera, la hidrosfera y la atmósfera de la Tierra. Los conocimientos sobre esta circulación de carbono posibilitan apreciar la intervención humana en el clima y sus efectos sobre el cambio climático.

El carbono (C) es el cuarto elemento más abundante en el Universo, después del hidrógeno, el helio y el oxígeno (O). Es el pilar de la vida que conocemos. Existen básicamente dos formas de carbono: orgánica (presente en los organismos vivos y muertos, y en los descompuestos) y otra inorgánica (presente en las rocas).

En el planeta Tierra, el carbono circula a través de los océanos, de la atmósfera y de la superficie y el interior terrestre, en un gran ciclo. El ciclo del carbono consta de dos fases:

- Asimilación: Síntesis de materia orgánica y formación de compuesto carbonados
- Desasimilación: Degradación de estas sustancias en la respiración de los animales y plantas heterótrofas

VIDEO EXPLICATIVO DEL CICLO DEL CARBONO:

[https://es.video.search.yahoo.com/search/video;\\_ylt=A9mSs2iqvsBZVUMAXiKT.Qt.;\\_ylu=X3oDMTByZmVxM3NOBGnVbG8DaXlyBHBvcwMxBHZOaWQDBHNIYwNzYw--](https://es.video.search.yahoo.com/search/video;_ylt=A9mSs2iqvsBZVUMAXiKT.Qt.;_ylu=X3oDMTByZmVxM3NOBGnVbG8DaXlyBHBvcwMxBHZOaWQDBHNIYwNzYw--)

?p=Youtube+Ciclo+De+Carbono&fr=mcafee#id=85&vid=lbc2el9lf3a748bcade6885dd695d4d2&action=view

## BLOQUE 10

- TEMA 2: Función cuadrática. Transformaciones químicas. I+D+i

### INDICE:

- 1.- FUNCIÓN CUADRÁTICA: Coeficientes, concavidad...
- 2.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA  $y = ax^2$
- 3.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA  $y = ax^2 + c$
- 4.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA  $y = ax^2 + bx$
- 5.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA  $y = ax^2 + bx + c$
- 6.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA CUADRÁTICA SIN TENER QUE HACER TABLA DE VALORES: eje de simetría, corte con los ejes, vértice.
- 7.- TRANSFORMACIONES QUÍMICAS.
- 8.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.
- 9.- ECUACIÓN QUÍMICA.
- 10.- AJUSTE DE REACCIONES QUÍMICAS.
- 11.- TIPOS DE REACCIONES QUÍMICAS.
- 12.- CÁLCULOS ESTEQUIMÉTRICOS.
- 13.- I+D+i

# 1.- FUNCIÓN CUADRÁTICA.

La forma general de una función cuadrática es la siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Las letras **a**, **b** y **c** se llaman coeficientes de la función; la letra **x** representa la variable independiente y la expresión **f(x)** representa el valor obtenido al reemplazar **x** por algún valor en el lado derecho de la igualdad, es decir, **f(x)** es la imagen de **x**. La expresión **f(x)** puede reemplazarse por la letra **y** que representa a la variable dependiente de la función. Así la expresión del recuadro anterior, también se puede escribir:  $y = ax^2 + bx + c$



## COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Como ya se dijo, en una función **cuadrática** de forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , las letras **a**, **b** y **c** se denominan coeficientes; el coeficiente **c** de una función **cuadrática** se llama **constante**.



**Ejemplo :**

Dada la función:  $f(x) = 2x^2 + 3x - 10$ ,

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = -10$$



**ACTIVIDAD**

Identifique los coeficientes **a**, **b** y **c** de las siguientes funciones cuadráticas:

**a)**  $f(x) = 3x^2 + 5x - 10$

$$a = \boxed{\phantom{00}} \quad b = \boxed{\phantom{00}} \quad c = \boxed{\phantom{00}}$$

**d)**  $f(x) = -2x^2 + 3x + 8$

$$a = \boxed{\phantom{00}} \quad b = \boxed{\phantom{00}} \quad c = \boxed{\phantom{00}}$$



## ORIENTACIÓN O CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA

Como apreciamos, al esbozar la gráfica de la función cuadrática, esta se abre hacia arriba o hacia abajo, lo que está indicado por el signo del coeficiente  $a$  que acompaña a  $x^2$ , es decir, dada la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

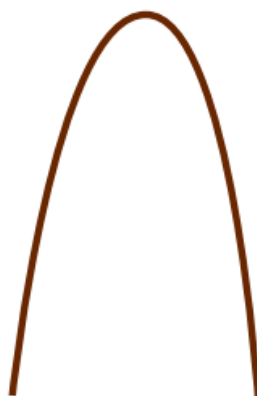
Si  $a > 0$

La parábola se abre hacia arriba, es decir, es **convexa**.



Si  $a < 0$

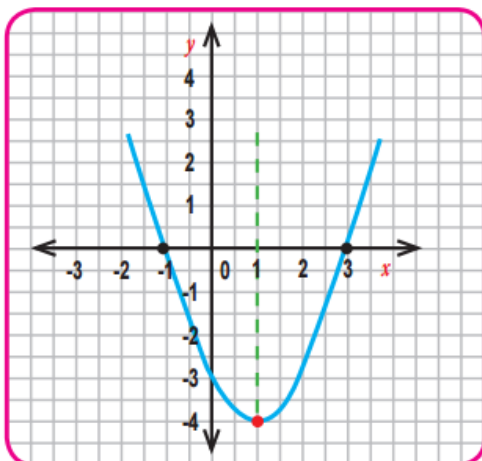
La parábola se abre hacia abajo, es decir, es **cóncava**.



Ejemplos:

1)  $f(x) = x^2 - 2x - 3, a = 1 > 0$

Esbozo

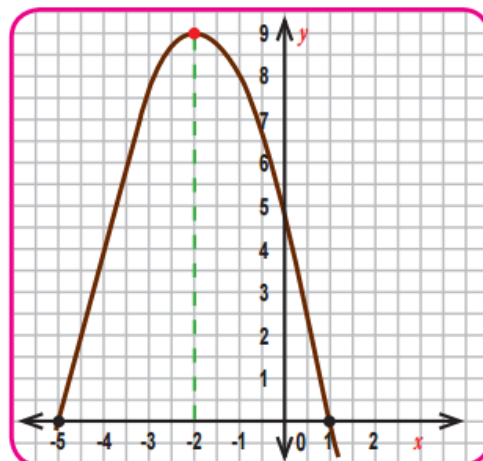


Orientación

Convexa

2)  $f(x) = -x^2 - 4x + 5, a = -1 < 0$

Esbozo



Orientación

Cóncava

ADEMÁS, SI NOS FIJAMOS EN EL VALOR DE  $a$ ; PODEMOS VER, QUE CUANTO MAYOR ES EL VALOR ABSOLUTO DEL COEFICIENTE  $a$ , MÁS ESTRECHAS O CERRADAS SE ENCUENTRAN LAS RAMAS.



## OTROS ELEMENTOS IMPORTANTES DE LA PARÁBOLA

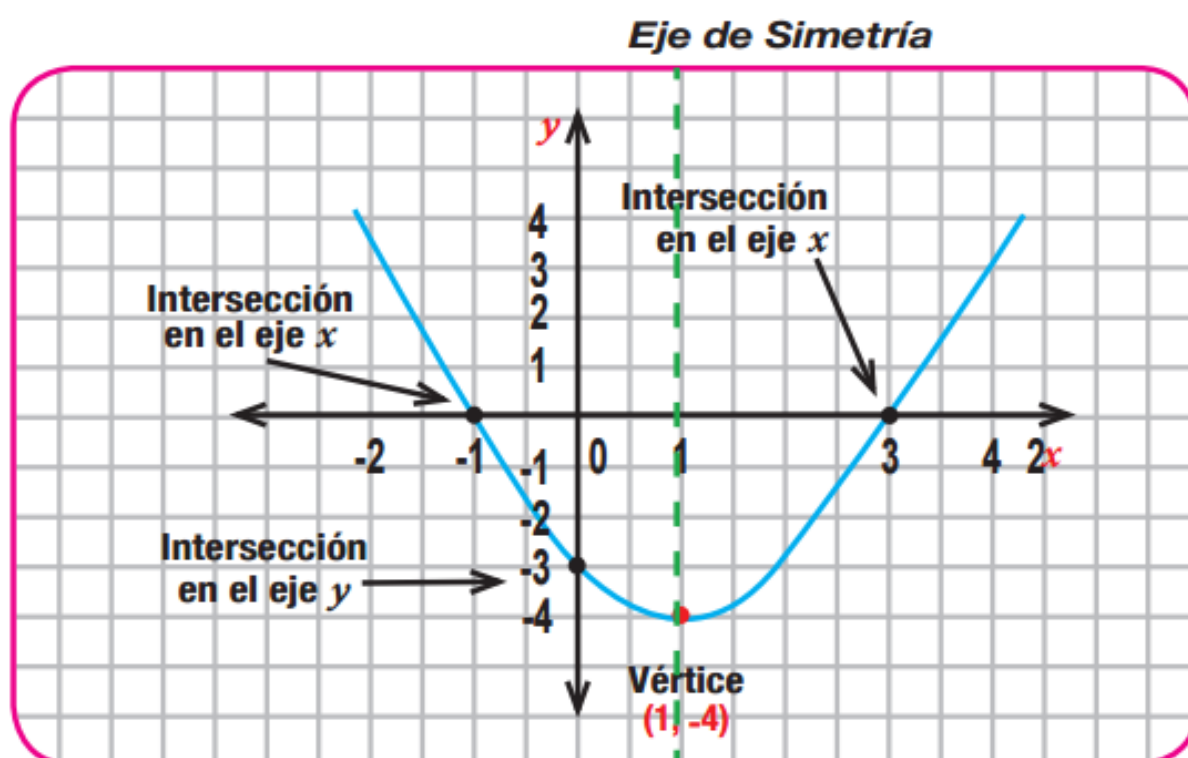
En el gráfico de una parábola, además de su concavidad, se pueden apreciar los siguientes elementos importantes:

- Eje de simetría
- Vértice
- Intercepto o valor de intersección en el eje Y
- Ceros o valores de intersección en el eje X



**Ejemplo:**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $a = 1 > 0$

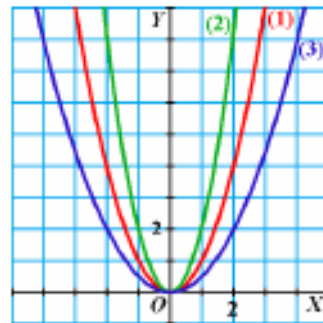
Al graficar la función cuadrática dada, podemos observar el intercepto, los ceros, el vértice y el eje de simetría:



## 2.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2$

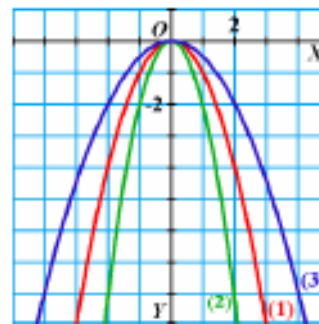
Vamos a representar las funciones (1)  $y = x^2$ , (2)  $y = 2x^2$  y (3)  $y = \frac{1}{2}x^2$ , que son del tipo  $y = ax^2$ , con  $a > 0$ .

| $x$ | $y = x^2$ | $y = 2x^2$ | $y = \frac{1}{2}x^2$ |
|-----|-----------|------------|----------------------|
| -3  | 9         | 18         | 4'5                  |
| -2  | 4         | 8          | 2                    |
| -1  | 1         | 2          | 0'5                  |
| 0   | 0         | 0          | 0                    |
| 1   | 1         | 2          | 0'5                  |
| 2   | 4         | 8          | 2                    |
| 3   | 9         | 18         | 4'5                  |



Si representamos ahora las funciones opuestas a las anteriores, (1)  $y = -x^2$ , (2)  $y = -2x^2$  y (3)  $y = -\frac{1}{2}x^2$ , las tablas de valores de estas funciones son las mismas que antes, cambiando el signo a los valores de la variable  $y$ .

| $x$ | $y = -x^2$ | $y = -2x^2$ | $y = -\frac{1}{2}x^2$ |
|-----|------------|-------------|-----------------------|
| -3  | -9         | -18         | -4'5                  |
| -2  | -4         | -8          | -2                    |
| -1  | -1         | -2          | -0'5                  |
| 0   | 0          | 0           | 0                     |
| 1   | -1         | -2          | -0'5                  |
| 2   | -4         | -8          | -2                    |
| 3   | -9         | -18         | -4'5                  |



A la vista de las gráficas se deducen las propiedades de estas funciones.

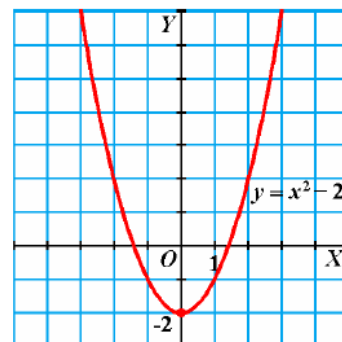
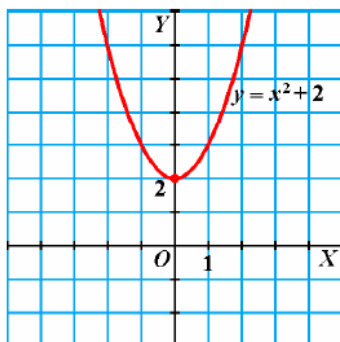
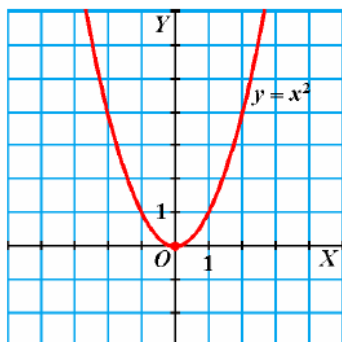
La **parábola** de ecuación  $y = ax^2$  tiene las siguientes propiedades:

- Si  $a > 0$ , la parábola está **abierta hacia arriba**.  
Si  $a < 0$ , la parábola está **abierta hacia abajo**.
- La función es **continua**.
- Si  $|a| > 1$ , la parábola es **más estrecha** que la  $y = x^2$ .  
Si  $|a| < 1$ , la parábola es **más ancha** que la  $y = x^2$ .
- Es **simétrica respecto del eje de ordenadas**.  
El eje de ordenadas  $Y$  (recta de ecuación  $x = 0$ ) es el **eje de la parábola**.
- El punto  $V = (0, 0)$  es el **vértice de la parábola**.

### 3.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2 + c$

Observa que las tablas de  $y = x^2 + 2$  e  $y = x^2 - 2$  se obtienen a partir de la tabla de  $y = x^2$ , sumando y restando 2 unidades respectivamente.

| $x$           | -4 | -3 | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3  | 4  |
|---------------|----|----|----|----|----|----|---|----|----|
| $y = x^2$     | 16 | 9  | 4  | 1  | 0  | 1  | 4 | 9  | 16 |
| $y = x^2 + 2$ | 18 | 11 | 6  | 3  | 2  | 3  | 6 | 11 | 18 |
| $y = x^2 - 2$ | 14 | 7  | 2  | -1 | -2 | -1 | 2 | 7  | 14 |

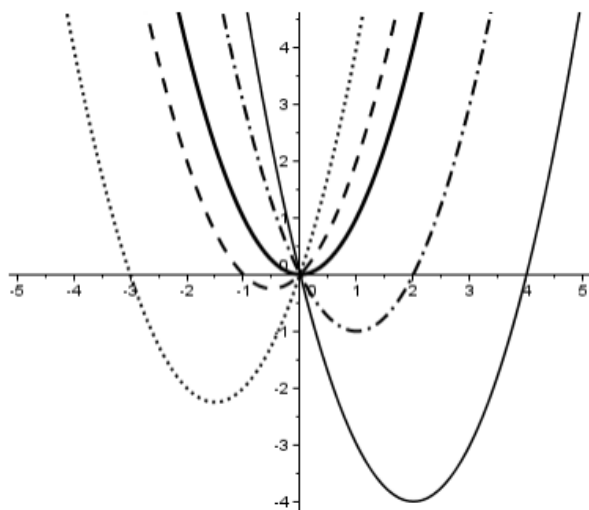


Las **funciones cuadráticas** del tipo  $y = ax^2 + c$  son **parábolas** cuyo **vértice** es el punto  $V = (0, c)$ . Se obtienen trasladando verticalmente  $c$  unidades la gráfica de  $y = ax^2$ .

- Si  $c > 0$ , la traslación vertical es **hacia arriba**.
- Si  $c < 0$ , la traslación vertical es **hacia abajo**.

### 4.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2 + bx$

- a)  $y = x^2$
- b)  $y = x^2 + x$
- c)  $y = x^2 - 2x$
- d)  $y = x^2 + 3x$
- e)  $y = x^2 - 4x$



Las **funciones cuadráticas** del tipo  $y = ax^2 + bx$  son parábolas que pasan por el punto  $(0,0)$  pero éste NO es su vértice.

## 5.- LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2 + bx + c$

Vamos a estudiar la función cuadrática completa cuya ecuación es de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ .

**Ejemplo.-** Representa gráficamente la parábola de ecuación  $y = 2x^2 - 8x + 7$ .

Para ello, con lo que sabemos hasta ahora, lo único que podemos hacer es realizar una tabla de varios valores:

| X | 0 | 1 | 2  | 3 | 4 |
|---|---|---|----|---|---|
| Y | 7 | 1 | -1 | 1 | 7 |

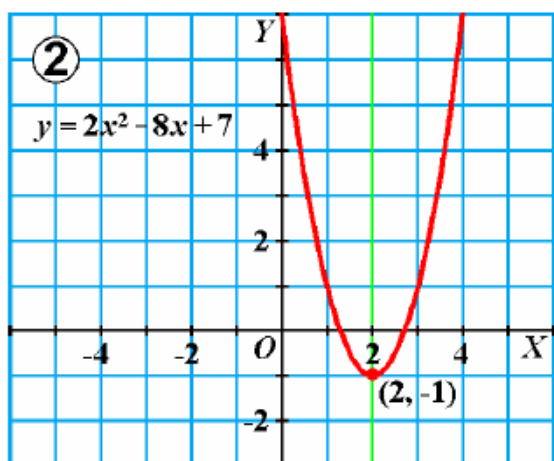
$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 7 = 7$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 7 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = -1$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 = 1$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = 7$$



### RESUMIENDO:

- Si  $c = 0 \rightarrow$  pasa por el punto  $(0,0)$ 
  - Si  $b = 0 \rightarrow$  su vértice es  $(0,0)$
  - Si  $b \neq 0 \rightarrow$  su vértice **NO** es  $(0,0)$
- Si  $b = 0 \rightarrow$  eje de simetría es el eje Y
  - Si  $c = 0 \rightarrow$  su vértice es  $(0,0)$
  - Si  $c \neq 0 \rightarrow$  su vértice es  $(0,c)$
- Si  $a = 0 \rightarrow$  NO ES UNA CUADRÁTICA porque ya no tendríamos una expresión polinómica de segundo grado, y lo que tendríamos sería una FUNCIÓN LINEAL.

## 6.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA CUADRÁTICA SIN TENER QUE HACER TABLA DE VALORES:

### EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA

En el tipo de **funciones cuadráticas** que estamos estudiando:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ; el **eje de simetría** es una recta vertical, paralela al eje  $y$ , que atraviesa la gráfica de manera que cada rama de ésta, separada por el eje, es el "reflejo" de la otra, asumiendo la idea de que éste simula un espejo. El eje de simetría intersecta a la parábola en el vértice y al eje  $X$  en el valor  $x$  que es la abscisa del vértice. La fórmula del valor  $x$  mencionado, conocida como **Ecuación del Eje de Simetría** es:

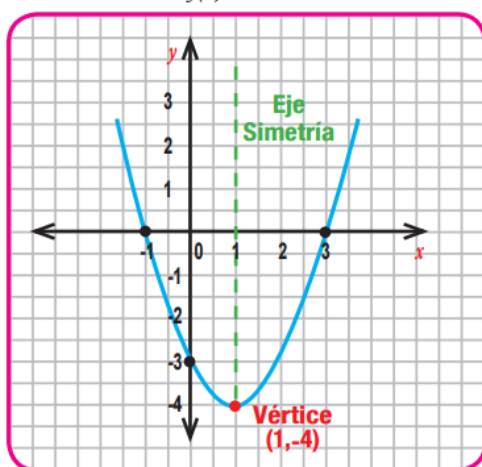
$$x = \frac{-b}{2a}$$



#### Ejemplo

Observe cómo determinar el eje de simetría:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



Como  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -3$  calculamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la valoración de la expresión algebraica:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Eje de simetría

$$x = 1$$

### VÉRTICE DE LA PARÁBOLA

Al esbozar la gráfica de la función cuadrática:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  observamos que dependiendo de la orientación de la parábola, esta presenta un punto en el plano cartesiano, que es mínimo si se abre hacia arriba (cóncava), o máximo si se abre hacia abajo (convexa), este punto se denomina **vértice de la parábola** y se puede determinar a través de la expresión:

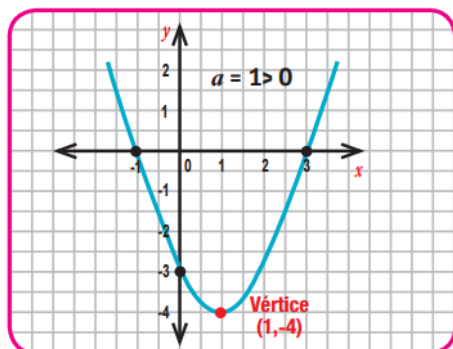
$$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$



#### Ejemplo:

Observe detenidamente el cálculo del vértice de la parábola.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



Los coeficientes son:  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -3$

determinamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la expresión:

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$  y de la evaluación algebraica:

$$\frac{-b}{2a} \rightarrow -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1, \text{ por lo tanto } x = 1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

por lo tanto  $y = -4$

Vértice

$$V(1, -4)$$

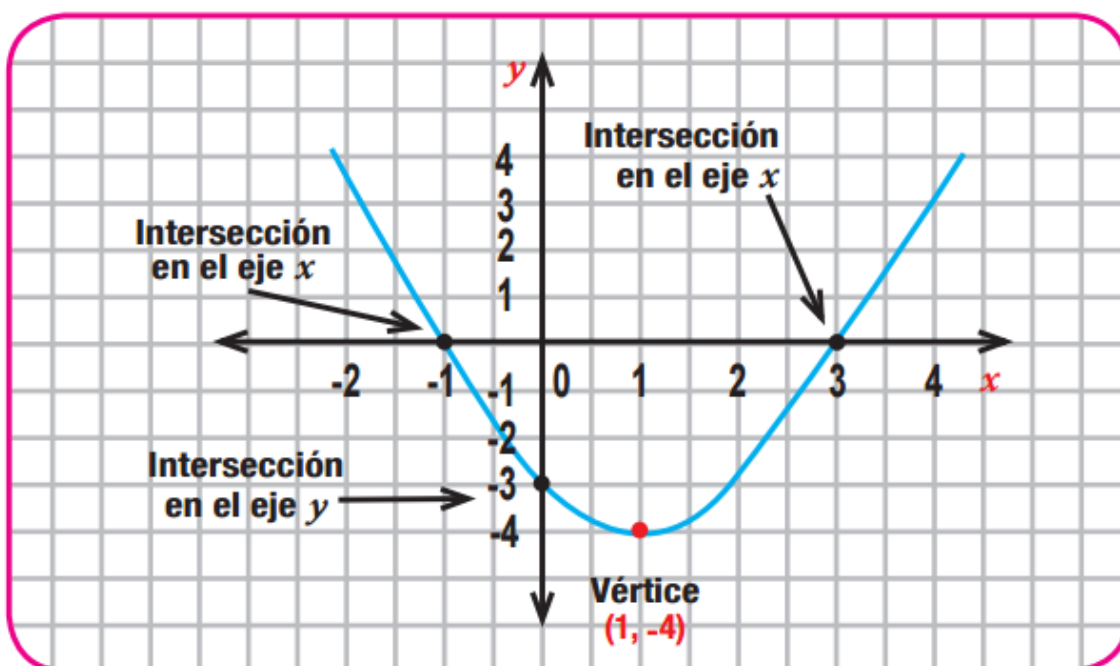


## INTERSECCIÓN CON LOS EJES: INTERCEPTO Y CEROS

- 1) INTERCEPTO:** Se llama así al valor donde la gráfica de la función intercepta al eje  $y$ . Para determinar este valor se reemplaza  $x$  por 0 en la ecuación de la función. Así,  $y = f(0)$  es el valor en que la gráfica corta al eje  $y$ . Es evidente que dada la función cuadrática,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $c$  es el intercepto.
- 2) CEROS:** Se llaman así a los valores donde la gráfica de la función intercepta al eje  $x$ . Para determinar la intersección con el eje  $x$ , se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática. Así, al hacer en la ecuación  $y = 0$ , y resolver  $f(x) = 0$ , se determinan los ceros de la función. La cantidad de ceros puede ser 2, 1 o 0, caso último en que la gráfica no intercepta al eje  $x$ .



**Ejemplo:**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $a = 1 > 0$



### 1) Intersección con el eje $y$ :

Se evalúa  $x = 0$ . Luego:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

∴ La intersección con el eje  $y$  es  $(0, -3)$

### 2) Intersección con el eje $x$ :

Al igualar a cero la función cuadrática se obtiene la ecuación cuadrática:  $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ , que resolvemos usando la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a = 1; \quad b = -2; \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

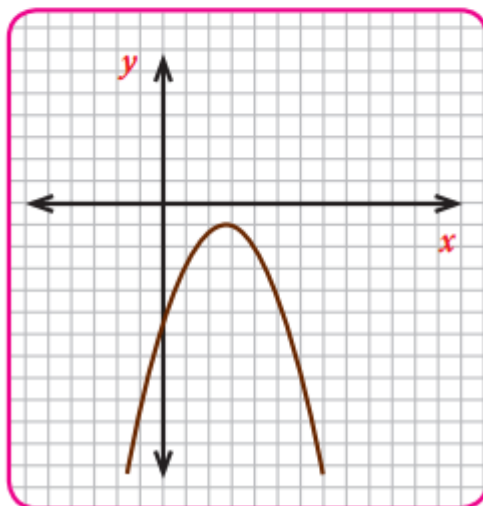
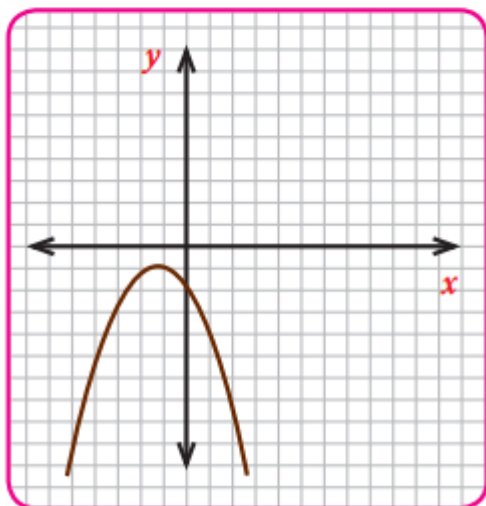
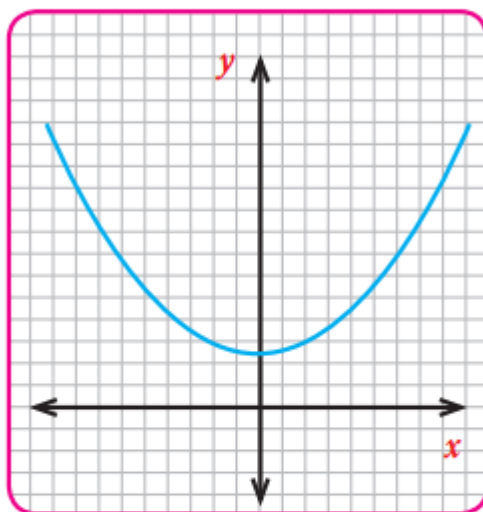
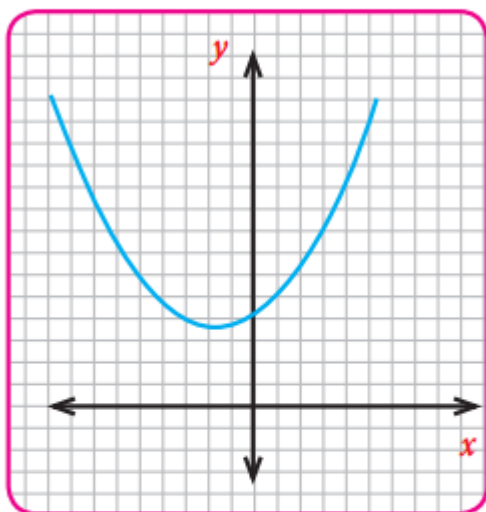
∴ Las intersecciones con el eje  $x$  son:

$(3, 0)$  y  $(-1, 0)$



## PARÁBOLAS SIN INTERSECCIÓN CON EL EJE $x$

- Dentro de las funciones cuadráticas que estamos estudiando, nos encontramos con parábolas que **no tienen intersecciones con el eje  $x$** , es decir, **solo poseen intersección con el eje  $y$** , y su gráfica corresponderá a algunas de las siguientes formas:

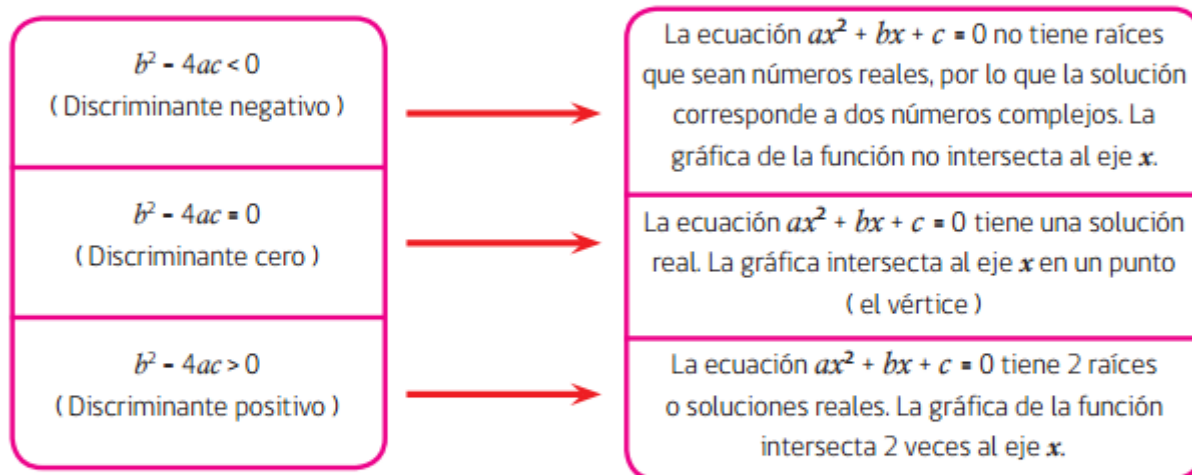




## PROCESO ALGEBRAICO PARA DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN POSEE INTERSECCIONES CON EL EJE $x$ .

Algebraicamente, se puede determinar rápidamente si una función tiene, o no, intersecciones con el eje  $x$ . Para ello, basta analizar el signo del **DISCRIMINANTE**.

En la función  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$   
la expresión algebraica del discriminante es:  
 $b^2 - 4ac$



### Ejemplo:

Sea  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ , determinar si posee intersecciones con el eje  $x$

Primero identificamos los coeficientes:  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$

Luego valoramos algebraicamente la expresión discriminante:

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11$$

La expresión **discriminante** es negativa, por lo que determinamos que la ecuación no tiene raíces reales, por lo tanto la gráfica de la función  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ , no interseca al eje  $x$ .

Una vez calculados el eje de simetría, el vértice, el punto de corte con el eje  $y$  y los puntos de corte con el eje  $x$ , tendremos ya, de esta manera, cuatro puntos de la parábola. Esos puntos los llevamos a un eje de simetría y los unimos para representar la parábola. En ocasiones, serán pocos y deberemos obtener otros tres puntos de la forma “estándar”; es decir, calculando el valor de  $f(x)$  para diferentes valores de  $x$  escogidos por nosotros.

## 7.- TRANSFORMACIONES QUÍMICAS.

### A) CAMBIOS FÍSICOS Y CAMBIOS QUÍMICOS

Se conoce como cambio físico cualquier cambio que se produce sin que varíe la naturaleza de las sustancias, es decir, sin que se formen sustancias nuevas. Por ejemplo, los cambios de estado o las disoluciones.

Se conocen como cambios químicos las transformaciones de una, dos o más sustancias en otras diferentes con propiedades características diferentes. Por ejemplo, la oxidación de un metal.

En un cambio químico o reacción química unas sustancias se transforman en otras diferentes. Aquellas de las que se parte se denominan **reactivos** y las sustancias que se forman, **productos**.

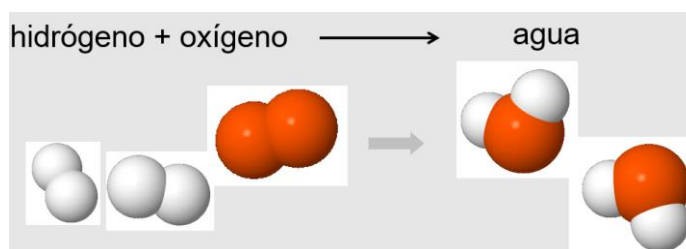


Del estudio de muchas reacciones químicas se pueden establecer las siguientes conclusiones:

La existencia de una reacción química se puede poner de manifiesto por un cambio de color, la formación de un sólido, la formación de un gas o un cambio de temperatura.

En las reacciones químicas hay variación de energía. A las reacciones que desprenden energía se les llama **exotérmicas**. A las que absorben energía, **endotérmicas**. Un ejemplo de reacción exotérmica es la reacción de combustión. Los combustibles (madera, carbón, gasolina, alcohol, et.) arden en presencia del oxígeno del aire, produciendo dióxido de carbono y agua y liberando energía en forma de calor.

La masa se conserva en las reacciones químicas



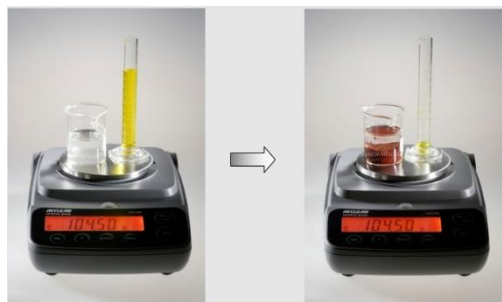
- ☐ La naturaleza de los reactivos.
- ☐ El grado de división de una sustancia.
- ☐ La temperatura.
- ☐ La concentración de los reactivos.
- ☐ La presencia de unas sustancias llamadas catalizadores o inhibidores, que son capaces de aumentar o disminuir, respectivamente, la velocidad de las reacciones.

a) Quemar alcohol con una cerilla;                      b) Derretir mantequilla en una sartén;

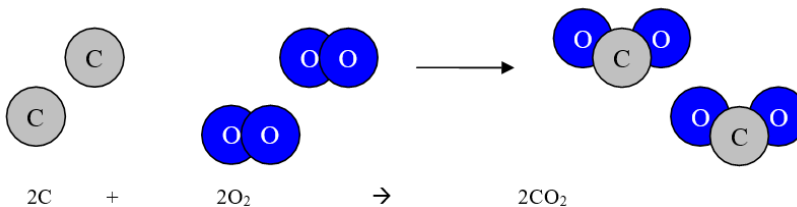
c) Se “quema” una rebanada de pan olvidada en la tostadora;                      d) Evaporación del agua

Figure 1 consists of two panels, (a) and (b), illustrating the formation of a protein complex. Panel (a) shows a mixture of monomers (small circles) and dimers (two small circles joined together). Panel (b) shows the same mixture after a reaction, where the monomers and dimers have formed a complex (a cluster of monomers and dimers). The reaction is indicated by a large arrow pointing from (a) to (b).

## 8.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA



**“En una reacción química, la masa de los reactivos es igual a la masa de los productos.”**



## 9.- ECUACIÓN QUÍMICA

Una ecuación química es una representación abreviada de una reacción. En ella se escriben las fórmulas de los reactivos y de los productos de la reacción, separados por una flecha.

Reactivos  $\rightarrow$  Productos

Por ejemplo, el hidrógeno reacciona con el oxígeno para producir agua:  $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O}$

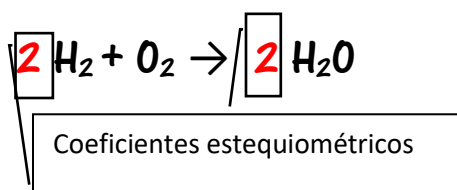
Si una reacción química es una reordenación de átomos, tiene que haber el mismo número de átomos en los reactivos y en los productos

| Símbolos utilizados en las ecuaciones |                               |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| Símbolo                               | Significado                   |
| (s)                                   | Indica el estado sólido       |
| (l)                                   | Indica el estado líquido      |
| (g)                                   | Indica el estado gaseoso      |
| (ac)                                  | Identifica disuelto en agua.  |
| +                                     | Reacciona con                 |
| $\longrightarrow$                     | Separa reactivos de productos |
| $\longleftrightarrow$                 | Reacción reversible           |
| $\uparrow$                            | Desprendimiento de Gas        |
| $\downarrow$                          | Precipitación de sólido       |
| $\xrightarrow{\Delta}$                | Agregar calor                 |

## 10.-AJUSTE DE UNA ECUACIÓN QUÍMICA.

En muchas ocasiones en una ecuación química no se cumple la Ley de Conservación de la masa. Entonces, decimos que la ecuación NO ESTÁ AJUSTADA. Por ejemplo, en la ecuación  $\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ . Si nos fijamos bien, en los reactivos tenemos: 2 átomos de hidrógeno y dos de oxígeno; sin embargo en los productos tenemos: dos átomos de hidrógeno PERO sólo uno de oxígeno. Por tanto está sin ajustar porque falta un átomo de oxígeno.

¿CÓMO PODEMOS AJUSTAR UNA ECUACIÓN QUÍMICA? Para hacerlo debemos poner unos números delante de las fórmulas químicas al que llamaremos COEFICIENTE ESTEQUIOMÉTRICO y que nos indican el número de moléculas que intervienen. Si continuamos con el ejemplo:



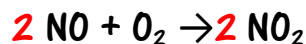
Otro ejemplo de ecuación sin ajustar:  $\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow \text{NO}_2$

La anterior ecuación no está completa. Hay 3 átomos de oxígeno en los reactivos y sólo dos en los productos. No se cumple la conservación de la masa. Está sin AJUSTAR.

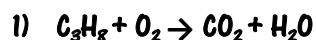
¿Cómo saber qué coeficientes estequiométricos tengo que poner? Pues, tenemos dos opciones:

- ❖ La primera es hacerlo "a ojo". Normalmente con ecuaciones sencillas y teniendo en cuenta que primero intentaremos ajustar los elementos que aparezcan en un solo compuesto a cada lado de la reacción. Cuando uno de los reactivos o

productos sea un elemento libre se ajustará en último lugar. Se pueden usar coeficientes fraccionarios y eliminarlos multiplicando por el común denominador.



Como ejemplo ajustaremos paso a paso la reacción de combustión del propano:

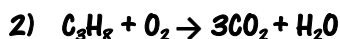


En primer lugar contamos los átomos de cada elemento en los reactivos y en los productos:

| Reactivos |           |         | Productos |           |         |
|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|---------|
| Carbono   | Hidrógeno | Oxígeno | Carbono   | Hidrógeno | Oxígeno |
| 3         | 8         | 2       | 1         | 2         | 3       |

Podemos ajustar los átomos en el orden que queramos, pero es mejor comenzar por aquellos que forman parte de un solo compuesto o elemento en los reactivos y en los productos. En nuestro ejemplo es mejor dejar los átomos de oxígeno para el final, cuando ya tengamos ajustados los átomos de carbono y de hidrógeno.

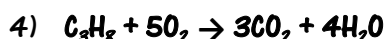
Empezamos ajustando los átomos de carbono. En nuestro caso, hay tres átomos de carbono en los reactivos ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) y un único átomo de carbono en los productos ( $\text{CO}_2$ ). Debemos poner un **3** delante de la fórmula del  $\text{CO}_2$  para que haya 3 átomos de carbono en los productos.



En segundo lugar ajustamos los átomos de hidrógeno. Hay 8 átomos de hidrógeno en los reactivos ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) y solo 2 átomos de hidrógeno en los productos ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Debemos poner un **4** delante del  $\text{H}_2\text{O}$  para que haya 8 átomos de hidrógeno en los productos.



Por último ajustamos los átomos de oxígeno. En la reacción hay 2 átomos de oxígeno en los reactivos ( $\text{O}_2$ ) y 10 átomos en los productos (6 en  $3\text{CO}_2$  + 4 en  $4\text{H}_2\text{O}$ ). Debemos poner un **5** delante de  $\text{O}_2$



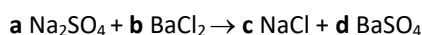
Los coeficientes estequiométricos son **1, 5, 3 y 4**. Por último, comprobamos que con estos coeficientes todos los elementos están ajustados:

| Reactivos |           |         | Productos |           |         |
|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|---------|
| Carbono   | Hidrógeno | Oxígeno | Carbono   | Hidrógeno | Oxígeno |
| 3         | 8         | 10      | 3         | 8         | 10      |

❖ La segunda manera es hacerlo de forma matemática. Pasos a seguir:

- 1) Asigna una letra a cada coeficiente estequiométrico. Conviene asignarlas por orden alfabético de izquierda a derecha.
- 2) Cogemos el primer elemento de la izquierda y planteamos la ecuación que representa el balance de átomos de dicho elemento: número de átomos del elemento en la izquierda = número de átomos del elemento en la derecha
- 3) Continuando por la izquierda de la reacción química, planteamos otra ecuación para el siguiente elemento diferente. De esta forma tendremos el balance de átomos de todos los elementos diferentes que existen en la reacción química.
- 4) Siempre tendremos una ecuación menos que incógnitas. En algún caso podríamos obtener más ecuaciones pero si nos fijamos bien veremos que algunas son equivalentes.
- 5) Asignamos el valor 1 a la letra (incógnita) que queramos.
- 6) Resolvemos el resto de las ecuaciones.
- 7) Si en los resultados tenemos decimales o fracciones, debemos multiplicar todas las incógnitas por un mismo número de tal forma que desaparezcan los decimales o las fracciones.

Véámoslo con un ejemplo:



Na :  $2a = c$

S :  $a = d$

O :  $4a = 4d$  (ecuación equivalente a la anterior)

Ba:  $b = d$

Cl:  $2b = c$

Por tanto, las ecuaciones son:  $2a = c$ ;  $a = d$ ;  $b = d$ ;  $2b = c$  Si por ejemplo, asignamos a 'd' el valor 1 entonces:

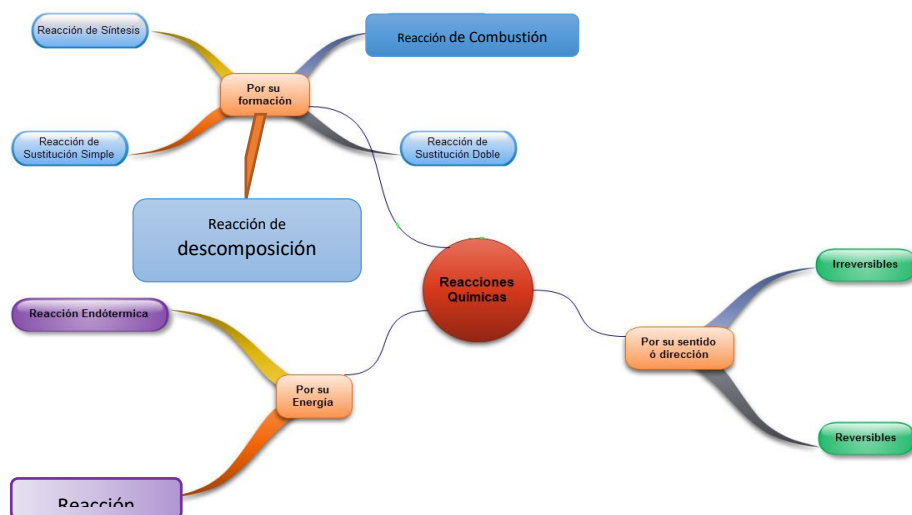
$d=1$ , y por tanto  $a = d \rightarrow a = 1$

$b = d \rightarrow b = 1$

$2 \cdot b = c \rightarrow 2 \cdot 1 = c \rightarrow c = 2$

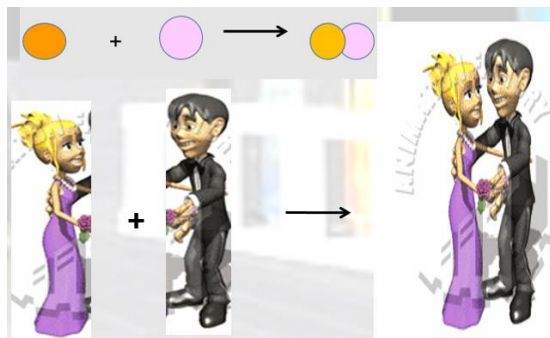
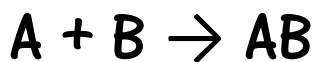
La ecuación ajustada es la siguiente:  $\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{BaCl}_2 \rightarrow 2\text{NaCl} + \text{BaSO}_4$

## 11.- TIPOS DE REACCIONES QUÍMICAS

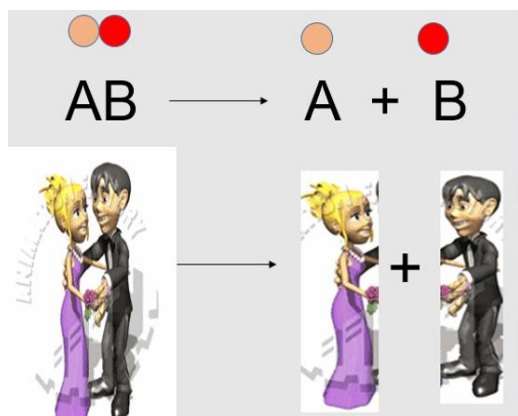


### A) REACCIÓN DE SÍNTESIS:

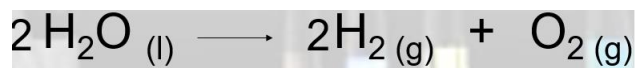
Cuando un elemento reacciona con otro para producir un compuesto, por lo que se ha sintetizado una nueva sustancia.



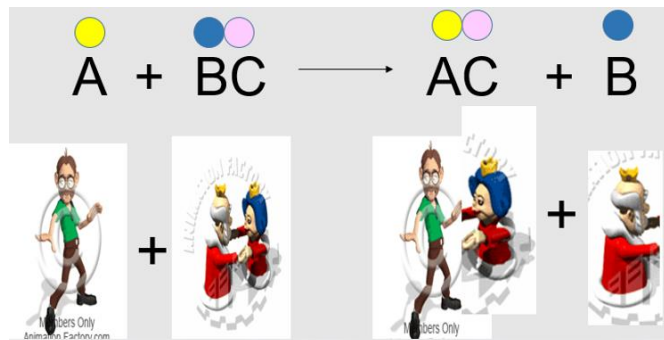
### B) REACCIÓN DE SUSTITUCIÓN:



Es una reacción en la que una sustancia se descompone en dos ó más sustancias simples.

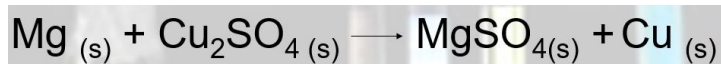


### C) REACCIÓN DE SUSTITUCIÓN SIMPLE:



Es una reacción en la cual el átomo de un elemento sustituye o reemplaza el átomo de otro en un compuesto.

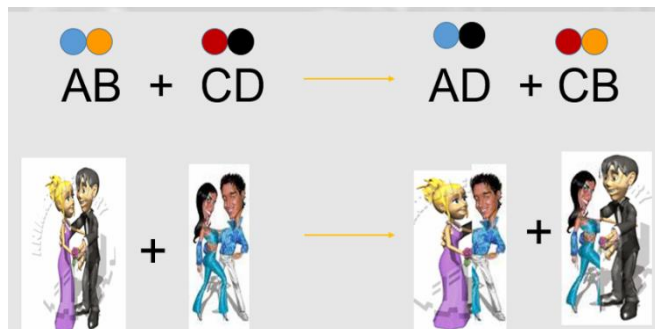
Los elementos más reactivos pueden desplazar a los elementos menos reactivos, generándose una reacción, sin embargo, un elemento menos activo no puede reemplazar a otro más activo, por lo cual no se genera una reacción química.



### Serie de actividad

| Reactividad del elemento          |                                                                                                               |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mas activo                        | Li<br>Rb<br>K<br>Ca<br>Na<br>Mg<br>Al<br>Mn<br>Zn<br>Cr<br>Fe<br>Ni<br>Sn<br>Pb<br>Hg<br>Cu<br>Ag<br>Pt<br>Au |
| El aluminio pierde con el calcio. |                                                                                                               |
| Menos activo                      |                                                                                                               |
| Reactividad del halógeno          |                                                                                                               |
|                                   | F <sub>2</sub><br>Cl <sub>2</sub><br>Br <sub>2</sub><br>I <sub>2</sub>                                        |

### D) REACCIÓN DE SUSTITUCIÓN DOBLE:



Es aquella donde dos compuestos intercambian iones ó átomos.



E)

### F) REACCIÓN DE COMBUSTIÓN:

La reacción de combustión se basa en la reacción química exotérmica de una sustancia o mezcla de sustancias llamada combustible con el oxígeno; obteniendo sustancias gaseosas entre las cuales las más comunes son  $\text{CO}_2$  y  $\text{H}_2\text{O}$ . En realidad es una reacción de **OXIDACIÓN**.



Este tipo de reacción es sumamente importante ya que en ella se fundamenta la generación de electricidad en las centrales térmicas, el principio de funcionamiento en la automoción o la base de la respiración celular.

En general, la generación de energía eléctrica consiste en transformar alguna clase de energía (química, cinética, térmica, lumínica, nuclear, solar entre otras), en energía eléctrica. Para la generación industrial se recurre a instalaciones denominadas centrales eléctricas, que ejecutan alguna de las transformaciones citadas. Éstas constituyen el primer escalón del sistema de suministro eléctrico. La generación eléctrica se realiza, básicamente, mediante un generador eléctrico; si bien estos no difieren entre sí en cuanto a su principio de funcionamiento, varían en función a la forma en que se accionan. Una central termoeléctrica es un lugar empleado para la generación de energía eléctrica a partir de calor. Este calor puede obtenerse de la combustión de GN, petróleo o carbón y sus derivados. Las centrales termoeléctricas consisten en una caldera en la que se quema el combustible para generar calor que se transfiere a unos tubos por donde circula agua, la cual se evapora. El vapor obtenido, a alta presión y temperatura, se expande a continuación en una turbina de vapor, cuyo movimiento impulsa un alternador que genera la electricidad. Luego el vapor es enfriado en un condensador donde circula por tubos agua fría de un caudal abierto de un río o por torre de refrigeración.

En la automoción esta reacción es la base del funcionamiento de los motores de combustión. Se introduce en los cilindros la mezcla de aire y combustible finamente pulverizado y se comprime a gran presión, en ese momento se hace saltar una chispa que eleva la temperatura y el combustible se quema en presencia del oxígeno del aire, es decir, se oxida rápidamente combinándose el carbono del combustible con el oxígeno del aire.

La energía química del combustible se libera en forma de calor cuando se quema, transformándose en el motor en energía mecánica. Se produce la transformación de la mezcla en vapor de agua  $\text{H}_2\text{O}$  con el oxígeno del aire y el hidrógeno del combustible,

y dióxido de carbono  $\text{CO}_2$ , por la reacción del oxígeno del aire y el carbono del combustible. El nitrógeno del aire no interviene y queda como  $\text{N}_2$ .

Esta reacción aunque teóricamente no produciría productos nocivos, la combustión incompleta que se produce en la realidad si los crea. Se calcula que los automóviles producen una sexta parte de la contaminación por óxidos de nitrógeno.

La respiración celular, al igual que la combustión, es un proceso en el cual se "quema" un "combustible" para obtener energía (o calor) y productos más simples.



La principal fuente de energía en el organismo la constituyen los carbohidratos que ingerimos en nuestra alimentación. Éstos durante la digestión se desdoblan en glucosa, considerada un almacén de energía solar.

La transformación de energía en el organismo se realiza oxidando (combustión lenta) esencialmente glucosa en el proceso de respiración, mediante mecanismos moleculares realizados a nivel celular, a temperatura constante y baja.

En la oxidación, una molécula de glucosa, se degrada en seis moléculas de agua, seis moléculas de bióxido de carbono y energía.

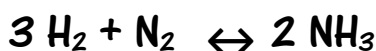
Tanto una máquina térmica como el organismo, en cuanto son sistemas que realizan trabajo, requieren de combustible.

La transformación de energía, tanto en la combustión como en la oxidación, tienen el mismo principio. La diferencia radica en la velocidad con que se realizan; la combustión es violenta y la reacción se mantiene por sí sola una vez que ha comenzado; en cambio, la oxidación es un proceso lento y controlado, de manera que la energía se transforma de acuerdo a los requerimientos del organismo.

Habitualmente, al hablar de respiración se hace referencia a la inhalación de aire, formado principalmente por nitrógeno y oxígeno, y a la exhalación de dióxido de carbono y vapor de agua. Sin embargo, este intercambio es sólo la parte "visible" del proceso, ya que otra, menos popular pero tan fundamental como aquella, es la que ocurre dentro de las propias células, razón por la que se la denomina respiración celular.

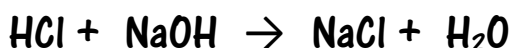
## G) REACCIONES REVERSIBLES:

Son aquellas en la que los productos sí pueden reaccionar entre sí para regresar a su estado anterior.



## H) REACCIONES IRREVERSIBLES:

Son aquellas que se realizan en un solo sentido, es decir, reacciones en las que los productos no pueden reaccionar entre sí para retornar a su estado original.



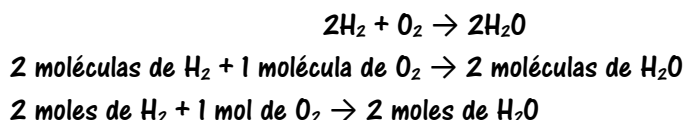
## 12.- CÁLCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS.

Llamamos cálculos estequiométricos a los que se realizan para calcular la cantidad de sustancia que se obtiene en una reacción a partir de cantidades conocidas de reactivos, o cualquier otra cantidad desconocida en una reacción.

Para realizar cálculos estequiométricos es necesario escribir la ecuación ajustada y obtener la relación en gramos: la proporción entre los gramos de los reactivos y los productos en una ecuación química

Al escribir una ecuación química ajustada, indicamos por medio de coeficientes las moléculas y los átomos de cada sustancia.

Como el mol es un número de partículas, igual para todas las sustancias, la relación en moles (la proporción entre los moles de los reactivos y los productos en una ecuación química) será la misma que la reacción en moléculas, que viene dada por los coeficientes estequiométricos. Por ejemplo:



Pero ahora bien, ¿QUÉ ES ESO DE MOL?. Para entender este concepto debemos aprender a diferenciar lo que es la **MASA ATÓMICA** y **MASA MOLECULAR**.

### A) MASA ATÓMICA:

Al igual que ocurre en la materia ordinaria (piensa en las distintas variedades de panes en tamaño, composición y peso, que existen en una panadería) es conveniente distinguir a los distintos tipos de átomos no sólo por su número atómico  $Z$  y su número másico  $A$ , sino también por su masa.

Si se elige el kilogramo, unidad de masa en el SI, como unidad de masa para medir la de los átomos, nos encontramos con valores tan pequeños que son incómodos de utilizar en nuestros cálculos. Por ejemplo, uno de los elementos más pesados de la naturaleza es un isótopo del uranio cuya masa, expresada en kilogramos es  $3,95 \cdot 10^{-25}$  kg. Como ves, es una cantidad extremadamente pequeña. Tampoco nos sería útil el gramo o el miligramo. Seguiríamos teniendo que trabajar con valores demasiado pequeños. Para evitar este inconveniente, se elige una nueva unidad de masa adecuada a los átomos: **la unidad de masa atómica,  $u$** , y con relación a ella se miden las masas de los átomos. Es como un submúltiplo. La relación entre la unidad de masa atómica ( $u$ ) y el gramo ( $g$ ) es:

$$1 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ u}$$

La masa de un elemento químico está escrita en cada una de las casillas del Sistema Periódico, sobre o bajo el símbolo del elemento químico correspondiente.

|                                    |                                        |                                     |                                      |                                    |                                   |                                  |                                   |
|------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 24<br><b>Cr</b><br>Cromo<br>51,996 | 25<br><b>Mn</b><br>Manganeso<br>54,938 | 26<br><b>Fe</b><br>Hierro<br>55,847 | 27<br><b>Co</b><br>Cobalto<br>58,933 | 28<br><b>Ni</b><br>Níquel<br>58,71 | 29<br><b>Cu</b><br>Cobre<br>63,54 | 30<br><b>Zn</b><br>Zinc<br>65,37 | 31<br><b>Ga</b><br>Galio<br>69,72 |
|------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|

Así, encontrarás la cifra 55,847 u para el Fe, 65,37 u para el Zn, 58,71 u para el Ni, etc. (Recuerda que esas cifras están medidas en unidades de masa atómica, u)

## B) MASA MOLECULAR:

Una sustancia química está formada por la unión de distintos tipos de átomos mediante enlaces químicos, dando lugar a estructuras más complejas: las moléculas y los cristales (iónicos, covalentes y metálicos). Las sustancias químicas poseen una fórmula química que las identifica. Si la sustancia es molecular, la fórmula indica cuáles son los elementos químicos y en qué cantidad están presentes en la molécula.

Por ejemplo, la fórmula química de una sustancia molecular como el tetracloruro de carbono es  $\text{CCl}_4$ . Esta fórmula indica que su molécula está formada por 4 átomos de cloro y 1 de carbono.

La **MASA MOLECULAR** de un compuesto químico es la suma de las masas de todos los átomos indicados en la fórmula. Su valor se expresa en unidades de masa atómica, u.

Por **ejemplo**; la fórmula del ácido sulfúrico es  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . En la fórmula hay 2 átomos de H, 1 átomo de S y 4 átomos de O.

Buscamos las masas atómicas del H, del S y del O en el Sistema Periódico:  $\text{H} = 1,01 \text{ u}$ ;  $\text{S} = 32,06 \text{ u}$ ;  $\text{O} = 16,00 \text{ u}$ .

La masa molecular = 2 veces la masa de un átomo de H + 1 masa de un átomo de S + 4 veces la masa de un átomo de O.

Masa molecular del ácido sulfúrico:

$$\text{H}_2\text{SO}_4 = 2 \cdot \text{H} + \text{S} + 4 \cdot \text{O} = 2,02 + 32,06 + 64 = 98,08 \text{ u}.$$

## C) MOL:

Una de las unidades más utilizadas en Química es el mol. El mol es una unidad del Sistema Internacional: es la unidad en la que se mide la cantidad de sustancia. Por tanto, la definición de mol es:

Un mol es la cantidad de sustancia que contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  unidades elementales de esa sustancia.

El número  $6,02 \cdot 10^{23}$ , número de unidades elementales que contienen un mol, se llama **número de Avogadro**,  $N_A$ .

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{\text{partículas}}{\text{mol}}$$

En cuanto al número de partículas que contiene, el mol es un concepto similar al de docena:

1 docena contiene 12 partículas.

1 mol contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  partículas.

1 docena de átomos contiene 12 átomos.

1 mol de átomos contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos.

1 mol de moléculas contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas.

1 mol de átomos de C contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos de C.

1 mol de moléculas de  $O_2$  contiene  $6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas de  $O_2$ .

Pero el mol es la cantidad de sustancia contenida en esas unidades:

1 mol de átomos es la masa contenida en  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos.

1 mol de moléculas es la masa contenida en  $6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas.



Una docena de melocotones cabe en una bandeja. Si se quisiera transportar en camiones un mol de melocotones, que serían  $6,023 \cdot 10^{23}$  melocotones, harían falta unos 20 trillones

Así:

- 1 mol de átomos de plata está formado por  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos de plata. Si pusiéramos todos esos átomos en una balanza, encontraríamos que marca 107,87 g.

$$1 \text{ mol de Ag} = 107,87 \text{ g de Ag}$$

- 1 mol de átomos de carbono está formado por  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos de carbono. Si pusiéramos todos esos átomos en una balanza, encontraríamos que marca 12,00 g.

$$1 \text{ mol de C} = 12,00 \text{ g de C}$$

Observa que, igual que 1 docena de huevos tiene una masa distinta que 1 docena de naranjas, 1 mol de plata tiene una masa distinta que 1 mol de carbono.

### ¿CÓMO SE CALCULA LA MASA DE 1 MOL DE UN ELEMENTO QUÍMICO O DE UNA SUSTANCIA QUÍMICA?

Está claro que un mol de distintas sustancias NO pesan lo mismo aunque contengan el mismo número de partículas. Pero se ha demostrado que el mol es la cantidad de sustancia cuya masa en gramos es numéricamente igual a la masa atómica (en caso de elementos químicos) o a la masa molecular (en caso de compuestos químicos).

**De manera práctica:** si queremos obtener el peso en gramos de un mol de una sustancia, calculamos su masa atómica o su masa molecular y la expresamos en gramos, y a este resultado lo llamamos MASA MOLAR del elemento o compuesto, según sea.

#### Ejemplos:

1) ¿Cuánto vale 1 mol de platino?

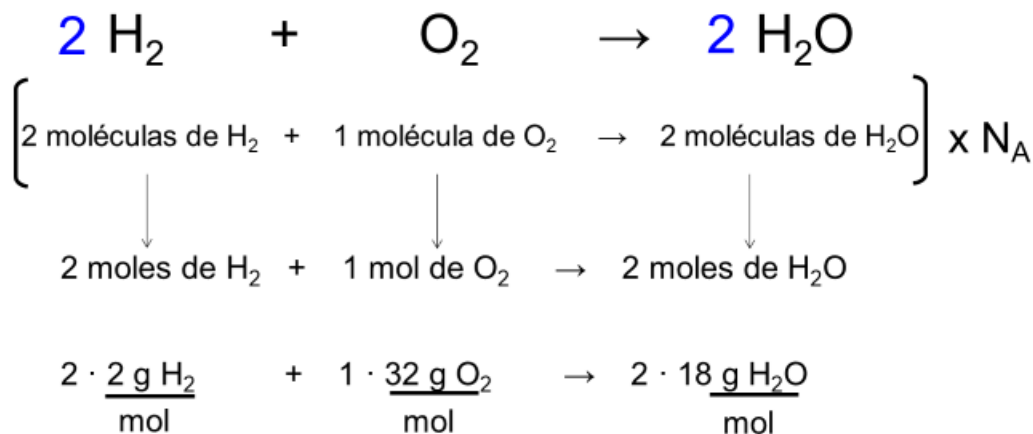
El platino es una sustancia atómica. Buscamos su masa atómica en la Tabla Periódica. Encontraremos que:  $Pt = 195 \text{ u}$ . Por lo tanto, la masa de 1 mol de platino es 195 g.  $1 \text{ mol de Pt} = 195 \text{ g}$ .

## 2) ¿Cuánto vale 1 mol de sulfuro de amonio?

Formulamos el sulfuro de amonio:  $(\text{NH}_4)_2\text{S}$ . Calculamos su masa molecular:

$$(\text{NH}_4)_2\text{S} = 2 \cdot \text{N} + 2 \cdot 4 \cdot \text{H} + \text{S} = 2 \cdot 14 + 8 \cdot 1 + 32 = 68 \text{ u. } 1 \text{ mol de } (\text{NH}_4)_2\text{S} = 68 \text{ g.}$$

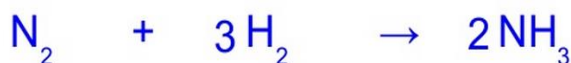
## CÁLCULOS EN MOLES Y EN MASA



## CÁLCULOS EN MOLES Y EN MASA

El nitrógeno reacciona con hidrógeno para formar amoníaco. ¿Cuánto hidrógeno se necesitará para formar 100 g de amoníaco?

1º escribimos la ecuación química y la ajustamos



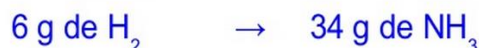
2º identificamos dato e incógnita

Incógnita: ¿g de  $\text{H}_2$ ? Dato: 100 g de  $\text{NH}_3$

3º establecemos la relación en moles entre dato e incógnita



4º convertimos la relación en moles en relación en gramos



5º establecemos la proporcionalidad con la incógnita y resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} 6 \text{ g H}_2 \rightarrow 34 \text{ g NH}_3 \\ x \text{ g H}_2 \rightarrow 100 \text{ g NH}_3 \end{array} \right\} \frac{6}{x} = \frac{34}{100} \quad x = \frac{6 \cdot 100}{34}$$

$$X = 17,65 \text{ g de H}_2$$

## 13.- I + D+ i

Investigación, desarrollo e innovación (habitualmente indicado por la expresión I+D+i o I+D+I) es un concepto de reciente aparición, en el contexto de los estudios de ciencia, tecnología y sociedad; como superación del anterior concepto de investigación y desarrollo (I+D). Es el corazón de las tecnologías, de la información y comunicación.

El desarrollo es un concepto que viene del sector económico, y la innovación e investigación vienen de la tecnología y la ciencia. Mientras que el de desarrollo es un término proveniente del mundo de la economía, los de investigación e innovación provienen respectivamente del mundo de la ciencia y la tecnología, y su variable relación está dentro del contexto de la diferencia entre ciencias puras y aplicadas siendo en cualquiera de los casos un compleja y extensa definición.

Se ha definido la investigación como el hecho invertir capital con objeto de obtener conocimiento, siendo la innovación invertir conocimiento para obtener ese capital, lo que marca muy claramente la ecuación de retorno de ciertas inversiones en investigación que una vez se convierten en innovación reportan grandes beneficios a la parte inversora, siendo los país los principales canales tanto de inversión como de repercusión en el crecimiento.

El nivel de potencia en I+D+I en un país se suele medir por el ratio entre el inversión realizada en I+D+I el PIB, Separando claramente la inversión pública y privada en este área.

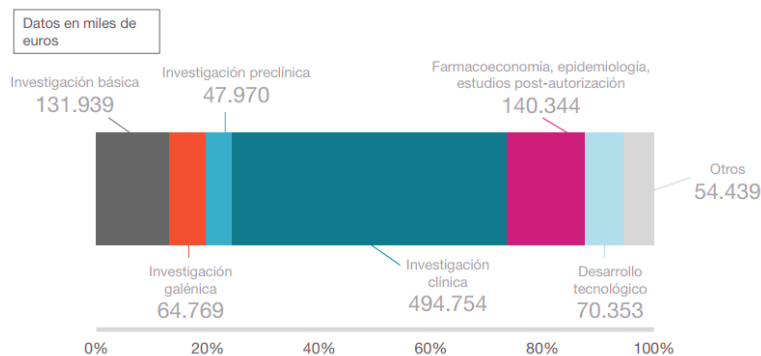
Casi el total de los países intentan, en la medida de lo posible, incrementar su actividad en I+D+i a través de subvenciones, préstamos bonificados, deducciones, etc, ya que estas inversiones se ven directamente reflejadas en el nivel competitivo del tejido empresarial y productivo de dicho país. Todas estas mejoras se ven repercutidas socialmente en forma de mejora en la calidad de vida, salud, etc.

La secretaría de Estado de investigación, desarrollo e innovación del Ministerio de economía, industria y competitividad ha establecido un PLAN ESTATAL de Investigación Científica y Técnica y de Innovación a partir del 2013. En el diseño y elaboración del mismo, han participado las distintas unidades de la Administración General del Estado, los agentes sociales, los centros públicos de investigación y las universidades, los centros tecnológicos y unidades de interfaz, las asociaciones empresariales, las plataformas tecnológicas existentes y expertos procedentes de la comunidad científica, técnica y empresarial, nacionales e internacionales, y ha contado además con la participación de las Comunidades Autónomas en la definición de los mecanismos de articulación y coordinación establecidos.



## I+D+i INDUSTRIA FARMACEÚTICA:

La elevada cualificación constituye un elemento clave del empleo en I+D de la industria farmacéutica: los titulados superiores



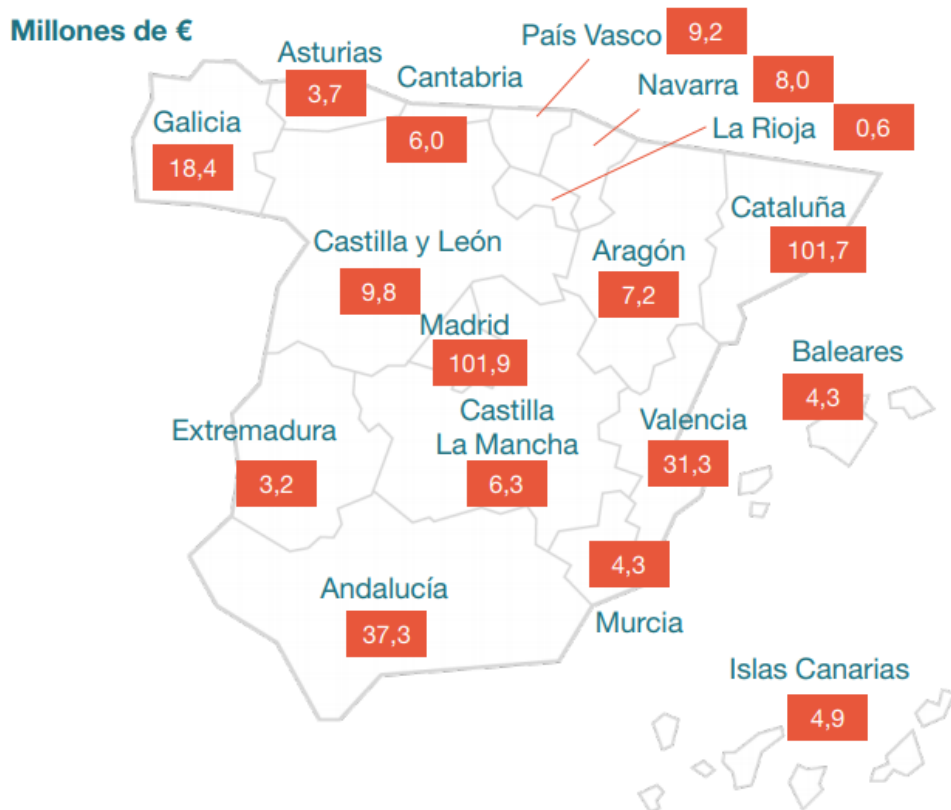
en investigación básica.

(licenciados y doctores) han pasado de ser menos de dos tercios de la plantilla empleada en I+D en 2003 a suponer más de cuatro quintas partes en 2015.

La industria farmacéutica invirtió 1004 millones de euros en I+D en 2015. La principal partida del gasto (más de 494 millones) fue la dedicada a ensayos clínicos y se invirtieron más de 132 millones de euros

De los 974 millones de euros invertidos en I+D, el 41% se dedicó a contratos de investigación con hospitales, universidades y centros públicos.

## Distribución geográfica del gasto en I+D extramuros (2015)



Fuente: Farmaindustria

Gasto en I+D extramuros en 2015  
**416,2 millones €**



## I+D+i INDUSTRIA ALIMENTARIA:

La preocupación por la salud que caracteriza la sociedad actual ha llevado a la industria alimentaria –el mayor sector industrial de España, con más del 16% del total de la producción– a lanzarse de lleno en la investigación de ese alimento que proporcione al ciudadano la posibilidad de eludir las enfermedades que tanto teme.

Tradicionalmente, la industria alimentaria española se ha mantenido al margen de la investigación. Sin embargo, desde hace una década, los esfuerzos en I+D+i no dejan de crecer. Un buen ejemplo de ello es el proyecto Senifood, centrado en la investigación industrial de dietas y alimentos con características específicas para las personas mayores. Cuenta con el apoyo del Centro para el Desarrollo Tecnológico Industrial del Ministerio de Ciencia e Innovación (CDTI), y en él colaboran empresas productoras de ingredientes y empresas alimentarias. En total, los socios invertirán 24 millones en tres años.

Otro proyecto es Primer Diana. Seis empresas agroalimentarias y cinco centros de investigación de la Comunidad de Castilla y León se han unido para crear este proyecto, que tiene como objetivo global obtener antioxidantes naturales a partir de diferentes productos agroalimentarios (antioxidantes procedentes de la uva, de los cereales, del café o de las algas) y, a partir de ahí, estudiar el diseño de ingredientes a base de esos antioxidantes para su posterior aplicación en diferentes matrices alimentarias (productos cárnicos, lácteos, piensos para animales, pastas alimentarias, café, harinas, bebida y refrescos).

El crecimiento de la inversión en I+D+i es exponencial, gracias, fundamentalmente, a esa nueva familia de alimentos funcionales, elaborados no sólo por sus características nutricionales sino también para cumplir una función específica de mejora de la salud. Para ello se les agrega desde minerales, vitaminas, ácidos grasos o fibra alimenticia hasta antioxidantes.

Existe, no obstante, una preocupación creciente desde finales del siglo pasado por parte de la comunidad científica tanto por las propiedades atribuidas a este tipo de alimentos como por las posibles consecuencias de incorporar determinados nutrientes en un alimento a largo plazo. Otra de las cuestiones a debate es, precisamente, si el refuerzo de los alimentos puede elevar la ingesta de los nutrientes en una cantidad mayor a la esperada. Las autoridades alimentarias y sanitarias de todo el mundo reclaman a los consumidores que el consumo de estos alimentos sea parte de una dieta equilibrada, y en ningún caso como un sustituto de ésta.

#### I+D+i INDUSTRIA QUÍMICA:

LA INDUSTRIA QUÍMICA BÁSICA se encarga de elaborar productos químicos básicos que emplea como materia prima la industria química en general, de manera que estos compuestos básicos son transformados en otros productos químicos. Este subsector abarca un amplio abanico de productos de muy diferente naturaleza química y aplicaciones diversas.

Es importante subrayar que la heterogeneidad de la química española, generadora de miles de productos diferenciados que se hallan tanto al inicio de la cadena de valor de la práctica totalidad de los sectores (petroquímica, materias primas plásticas, gases industriales, agroquímica...) como directamente en mercados de consumo (farmaquímica, detergencia, cosmética, pinturas...), nos permite mantener una visión privilegiada, permitiendo orientar con mayor nitidez las líneas de investigación básica, la innovación aplicada y el desarrollo tecnológico,

En diversos estudios con vista al futuro se pone de relieve que el sector químico será la industria manufacturera que mayor crecimiento experimente desde nuestros días hasta el año 2030. La causa de esta notable proyección se encuentra,

esencialmente, en la capacidad innovadora que la química presenta y su intervención en toda la actividad productiva para ofrecer respuestas adecuadas tanto a las necesidades esenciales, como la salud, la alimentación o la disponibilidad de energía y agua, como a los sectores más avanzados, como la ingeniería, el transporte, la edificación o las telecomunicaciones. Es decir, la química tendrá que proveer de medicamentos que sigan incrementando la esperanza y calidad de vida, de productos agroquímicos que multipliquen el rendimiento de los cultivos, de tecnologías para aumentar la producción y el consumo eficientes de agua y energía, de materiales y productos que mejoren el rendimiento y la sostenibilidad de todos los medios de transporte, de materiales innovadores y tecnologías que permitan desarrollar ciudades inteligentes, de nuevos soportes para almacenamiento y transmisión de datos.

Por lo que respecta al ámbito específico exclusivo de la innovación, las decisiones de inversión pertenecen a las empresas. En España, en concreto, el químico ha sido uno de los sectores más activos en este sentido, y de hecho es hoy el que más recursos destina la I+D+i, acumulando en sus empresas el 20% de las inversiones y el 24% de los investigadores del conjunto de la industria nacional.

Con el objetivo de propiciar la actividad innovadora de las empresas y con ello incrementar la participación de las empresas implantadas en España en el crecimiento previsto de la demanda global de productos químicos, se creó la Plataforma Tecnológica de Química Sostenible-SusChem España. Integrada por todos los agentes del sistema ciencia-tecnología-innovación relacionados con la química, SusChem España ha propiciado la cooperación entre empresas y centros públicos y privados de investigación, esencialmente en áreas tan relevantes para nuestro futuro como son la nanotecnología y los nuevos materiales, la biotecnología industrial, el diseño de nuevos procesos y la economía circular (alta eficiencia en el consumo de recursos), todo ello bajo el prisma de la sostenibilidad.

las diferentes tendencias y necesidades de la I+D+i en el campo de la química en España, a medio y largo plazo, será ofrecer soluciones para incrementar la eficiencia y el almacenamiento energéticos, el rendimiento de las celdas fotovoltaicas, la producción de hidrógeno, el desarrollo de tecnologías de transporte económicamente viables, el uso de materias primas renovables, o el diseño de reacciones y procesos ecoeficientes, entre muchas otras.

#### **I+D+i INDUSTRIA ENERGÉTICA:**

El Plan Estratégico de Tecnologías Energéticas (SET Plan) es la referencia de las políticas en tecnologías energéticas en la Unión Europea.

SET Plan es la planificación estratégica común para desarrollar una cartera de tecnologías menos costosas, más eficientes y más limpias, de baja emisión de carbono, a través de la investigación coordinada a nivel europeo. Europa está comprometida en la creación de la Unión de la Energía, que tiene como objetivos contribuir al crecimiento económico, mejorar la seguridad energética de Europa y luchar contra el cambio climático. La Unión de la Energía debe construirse en base a la transformación del sistema energético europeo atendiendo a criterios de eficiencia económica y reducción de costes. Para ello, es necesaria una transición hacia sistemas de abastecimiento energético más inteligentes, más flexibles, más sostenibles, más

*descentralizados, más integrados, más seguros y competitivos. Es necesario que tanto productores como distribuidores innoven en la forma en que se produce, transporta, se suministra y se prestan servicios a los consumidores. Esta transformación colocará a los consumidores como centro del sistema y es clave para el desarrollo de la competitividad de la industria europea.*

*De acuerdo con lo anterior, se han identificado las siguientes líneas de acción para llevar a cabo la transformación:*

- *4 prioridades principales: energías renovables, un sistema energético más inteligente centrado en el consumidor, eficiencia energética y sistemas de transporte más sostenibles.*

|         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |     |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 58      | 59      | 60      | 61      | 62      | 63      | 64      | 65      | 66      | 67      | 68      | 69      | 70      | 71      | 72  |
| Ce      | Pr      | Nd      | Pm      | Sm      | Eu      | Gd      | Tb      | Dy      | Ho      | Er      | Tm      | Yb      | Lu      |     |
| 140.12  | 140.907 | 144.24  | 147.91  | 150.35  | 151.96  | 157.25  | 158.924 | 162.50  | 164.93  | 167.26  | 168.934 | 173.04  | 174.97  |     |
| 3.4     | 3.4     | 3       | 3       | 2.3     | 2.3     | 3       | 3.4     | 3       | 3       | 3       | 2.3     | 2.3     | 3       |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1.3     | 1.3     | 1.7     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     | 1.3     |     |
| 90      | 91      | 92      | 93      | 94      | 95      | 96      | 97      | 98      | 99      | 100     | 101     | 102     | 103     | 104 |
| Th      | Pa      | U       | Np      | Pu      | Am      | Cm      | Bk      | Cf      | Es      | Fm      | Md      | No      | Lr      |     |
| 232.037 | 231.036 | 238.028 | 237.047 | 244.064 | 243.061 | 247.065 | 247.065 | 251.079 | 252.083 | 257.105 | 258.105 | 259.106 | 260.107 |     |
| 1       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |     |

LANTANIDOS

## ACTINIDOS

## BLOQUE 11

- Tema 3: Trigonometría

### ÍNDICE

- 1.- INTRODUCCIÓN.
- 2.- CONCEPTOS PREVIOS.
- 3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO.
- 4.- RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.
- 5.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  Y  $60^\circ$
- 6.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.
- 7.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.

## 1.- INTRODUCCIÓN.

Etimológicamente trigonometría significa medición de triángulos. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

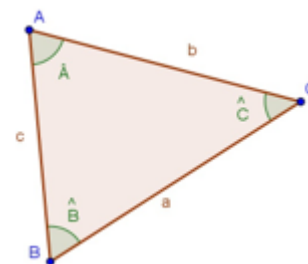
Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que es imposible obtener por medición directa.

En este capítulo estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

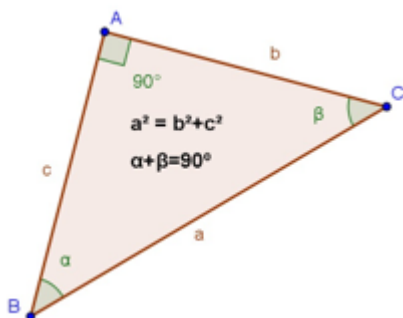
## 2.- CONCEPTOS PREVIOS.

### A) TRIÁNGULOS:

En un triángulo, los vértices se denotan con letras mayúsculas (A, B y C). Los lados se denotan con la letra minúscula del vértice opuesto al lado (a, b, c). Los ángulos se denotan con el acento



circunflejo encima de la letra mayúscula que denota el vértice del ángulo ( $\hat{A}$ )



En un triángulo rectángulo, el ángulo recto se asigna la letra A y así, a la hipotenusa la letra a minúscula, siendo b y c los dos catetos. Se utilizan las letras griegas  $\alpha$  y  $\beta$  para nombrar a los ángulos que no corresponden al de  $90^\circ$  respectivamente.

En un triángulo rectángulo se verifica el **teorema de Pitágoras** (El cuadrado

de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

**$a^2 = b^2 + c^2$** ). También se cumple que los dos ángulos agudos son complementarios ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ).

### B) ÁNGULOS Y SU MEDIDA:

Consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

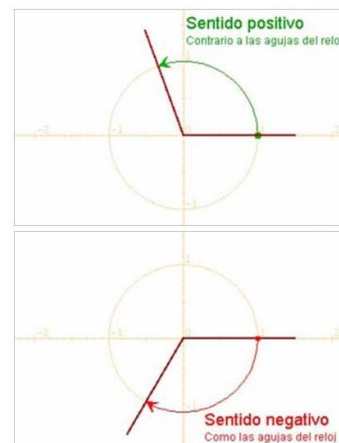
Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.

### GRADOS SEXAGESIMALES:

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos. Así un ángulo se mide en:

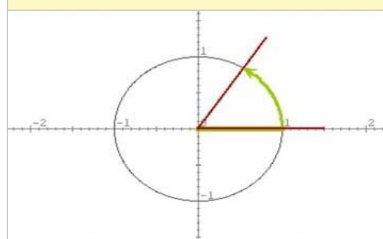
**grados° minutos' segundos"**  $\rightarrow$  1 ángulo completo =  $360^\circ$ ;  $1^\circ = 60'$ ;  $1'$



## SISTEMA INTERNACIONAL:

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia. Como la medida de toda la circunferencia es  $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$ , resulta

El ángulo de **1 radián** es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es



conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el **radián**. El radián es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo.

Se denota por **rad**. A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud  $2\pi R$ , a un

radián un arco de longitud  $R$ , entonces:  $N^{\circ}$  de radianes de un ángulo completo  $= 2\pi$  rad

## DE RADIANES A GRADOS Y DE GRADOS A

### RADIANES:

El semiperímetro de la semicircunferencia es  $\pi \cdot \text{radio} \rightarrow \pi$  radianes  $= 180$  grados. Por tanto, únicamente debemos tener presente que:

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

De grados a radianes:

$$\checkmark \text{ multiplicamos por } \frac{\pi}{180}$$

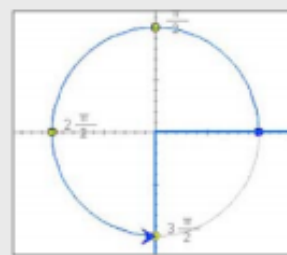
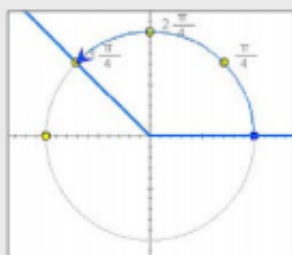
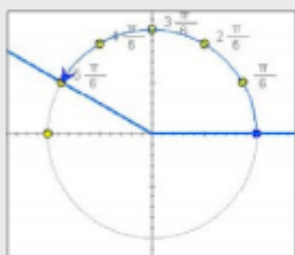
$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

De radianes a grados:

$$\checkmark \text{ multiplicamos por } \frac{180}{\pi}$$

### EJEMPLOS:

Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de  $5\pi/6$ ,  $3\pi/4$ , y  $3\pi/2$  rad.



Pasa a radianes: a)  $150^{\circ}$ , b)  $210^{\circ}$ , c)  $270^{\circ}$ , d)  $60^{\circ}$

$$a) 150^{\circ} = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 210^{\circ} = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 270^{\circ} = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 60^{\circ} = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Pasa a grados: a)  $11\pi/6$  rad, b)  $\pi/4$  rad, c)  $5\pi/4$  rad, d)  $2\pi/3$  rad

$$a) \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^{\circ}$$

$$b) \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^{\circ}$$

$$c) \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^{\circ}$$

$$d) \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^{\circ}$$

### 3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

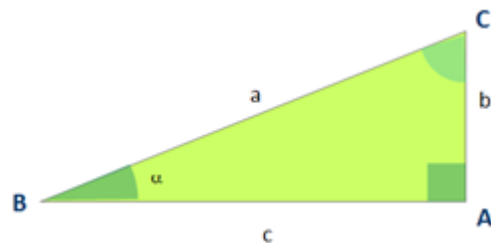
Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega  $\alpha$  (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que  $\alpha$  sea uno de sus ángulos.

Sea  $\widehat{ABC}$  uno de estos triángulos y situemos en el vértice B, el ángulo  $\alpha$ . Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo  $\alpha$ : seno, coseno y tangente como:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \text{cos } \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tan } \alpha = \text{tan } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$



También se utilizan las expresiones  $\text{tg } \alpha$  y  $\text{tag } \alpha$  como símbolos de la tangente de  $\alpha$ .

- **EJEMPLO:** Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo  $\widehat{ABC}$  cuyos catetos miden  $b = 30 \text{ cm}$  y  $c = 40 \text{ cm}$ .

**Solución:**

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow a = \sqrt{2500} = 50 \text{ cm}$ .

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \text{cos } \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \text{tg } \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \text{cos } \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

### 4.- RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ , es posible calcular las razones trigonométricas restantes,

**PRIMERA RELACIÓN FUNDAMENTAL:**

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1$$

gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes:

que también verás escrita como  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  dado que las potencias de las razones trigonométricas suelen escribirse con su exponente sobre la última letra de su notación y a continuación el nombre del ángulo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

## 5.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

|     | Seno         | Coseno       | Tangente     |
|-----|--------------|--------------|--------------|
| 30° | 1/2          | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 45° | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1            |
| 60° | $\sqrt{3}/2$ | 1/2          | $\sqrt{3}$   |

## 6.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados. En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

- **PRIMER CASO:** Se conoce la hipotenusa y uno de los ángulos.

Como estamos con un triángulo RECTÁNGULO, en realidad conocemos dos de los ángulos. Por tanto, el tercer ángulo lo obtenemos restando; ya que sabemos que en cualquier triángulo las sumas de sus tres ángulos debe ser 180°.

A partir de ahora, nos faltaría conocer el valor de los dos catetos. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin B; \quad \cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$$

- **SEGUNDO CASO:** Se conoce uno de los ángulos y un cateto.

En este caso nos ocurre lo mismo que en el anterior; es decir, realmente conocemos dos ángulos y el que nos falta lo podemos calcular restando a 180°.

De la misma forma procederemos para calcular la hipotenusa y el otro cateto:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} \quad \sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B}$$

- **TERCER CASO:** Se conoce dos lados del triángulo.

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa.  $a^2 = b^2 + c^2$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas,

y para conocer el valor del ángulo, despejamos escribiendo:  $B = \arcsin \frac{b}{a}$  que se lee “arcoseno de ...” y que significa “ángulo cuyo seno es  $\frac{b}{a}$ ” y que se obtiene con la calculadora activando el comando  $\sin^{-1}$  lo que conseguiremos con la secuencia:



$$\sin B = \frac{b}{a}$$

De forma análoga lo haremos con  $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$  o con  $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ .

### EJEMPLO:

- Resolver el triángulo ABC con ángulo recto en A en los dos casos siguientes:

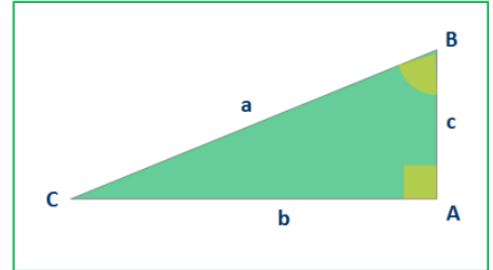
a)  $\hat{B} = 42^\circ$  y la hipotenusa  $a = 12$  m.

b) Los catetos miden 12 dm y 5 dm.

a) Cálculo de los ángulos:  $\hat{A} = 90^\circ$ ;  $\hat{B} = 42^\circ$ ;  $\hat{C} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

Cálculo de los lados:  $\operatorname{sen} 42^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \operatorname{sen} 42^\circ \approx 8,03$  m.

$\cos 42^\circ = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12 \cos 42^\circ \approx 8,92$  m.



b) Cálculo de la hipotenusa:  $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$  dm

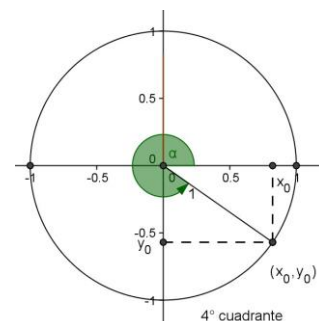
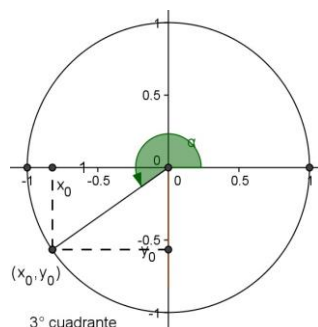
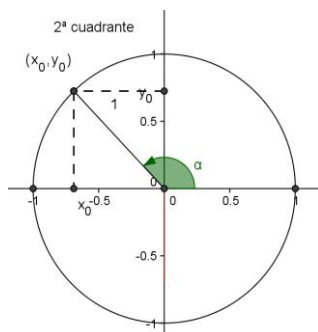
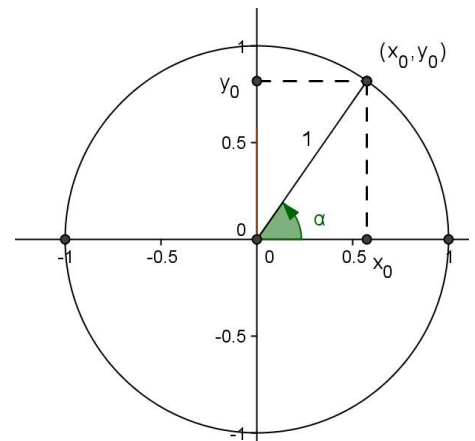
Cálculo de los ángulos:  $\hat{A} = 90^\circ$ ;  $\hat{B} = \operatorname{arc} \tan \frac{12}{5} = 67^\circ 22' 48''$ ;  $\hat{C} = 90^\circ - 67^\circ 22' 48'' = 22^\circ 37' 12''$ .

## 7.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.

**Definición:** Se llama *circunferencia goniométrica* a una circunferencia de radio 1 y con centro en el origen de un sistema de ejes coordenados.

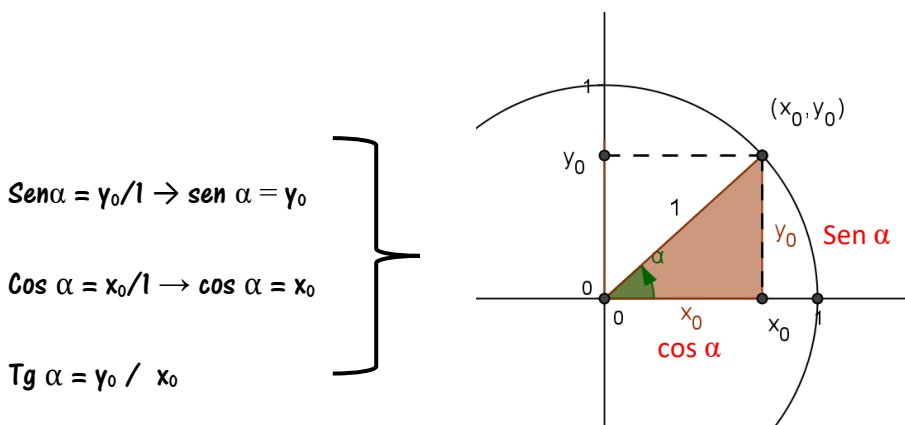
**Definición:** a cada uno de los cuartos en que los ejes dividen la circunferencia se les llama **cuadrante**.

Si el ángulo es agudo, el punto está en el 1<sup>er</sup> cuadrante si el ángulo es obtuso estará en el 2<sup>o</sup> cuadrante si el ángulo está entre  $180^\circ$  y  $270^\circ$  en el 3<sup>er</sup> cuadrante y si el ángulo está entre  $270^\circ$  y  $360^\circ$ , el punto estará en el 4<sup>o</sup> cuadrante:

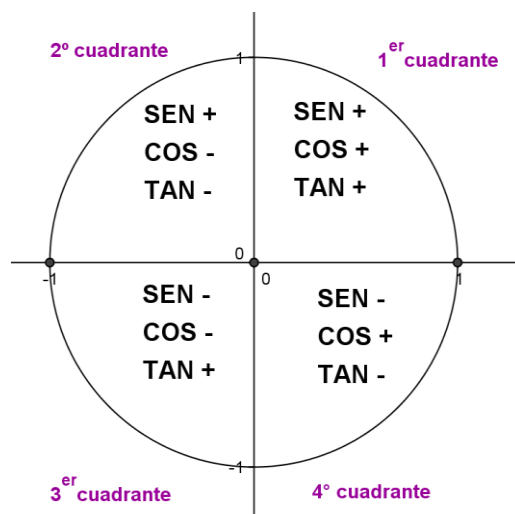


Los ángulos de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos iniciales.

Si consideramos el triángulo rectángulo siguiente y aplicamos la definición de seno, coseno y tangente:



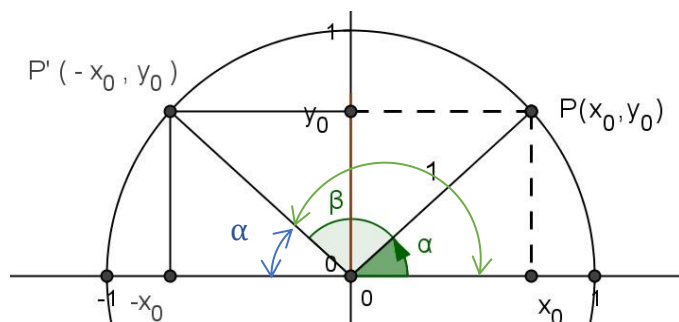
Teniendo en cuenta que el seno es la segunda coordenada y el coseno es la primera coordenada, y la tangente se obtiene dividiendo seno entre coseno tenemos el siguiente esquema que resume el signo que tendrán las razones trigonométricas según el cuadrante donde se sitúe el ángulo:



## 7. 1.- Reducción de ángulos cualesquiera al primer cuadrante:

### ➤ Ángulos en el segundo cuadrante. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios:.

Dos ángulos son suplementarios cuando al sumarlos obtenemos  $180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$



En la figura observamos que cuando dos ángulos son suplementarios los puntos que los determinan P y P' comparten el valor absoluto de sus coordenadas y difieren sólo en el signo de la primera coordenada.

Por tanto, aplicando la definición de seno y coseno en el ángulo  $\beta$ :

$$\text{Sen } \alpha = \text{sen } \beta ; \quad \text{cos } \alpha = - \text{cos } \beta ; \quad \text{tg } \alpha = - \text{tg } \beta$$

### Ejemplo. Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de $170^\circ$ :

$170^\circ$  es el suplementario de  $10^\circ$  que está en el primer cuadrante porque  $180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$ . Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de  $10^\circ$ :

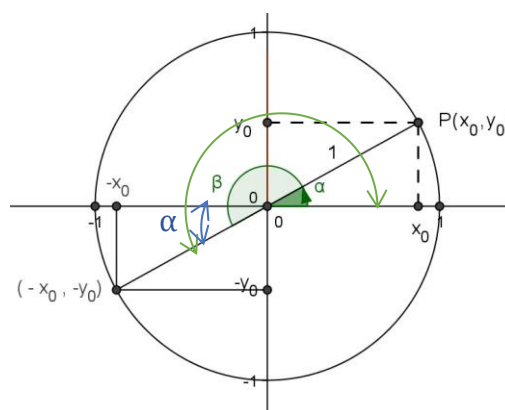
$$\operatorname{sen} 170^\circ = \operatorname{sen} 10^\circ ; \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ ; \quad \operatorname{tag} 170^\circ = -\operatorname{tag} 10^\circ .$$

### ➤ Ángulos en el tercer cuadrante. Razones trigonométricas de ángulos que difieren $180^\circ$ :

**Propiedad:** Sean dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\beta - \alpha = 180^\circ$

entonces se verifica que:

$$\operatorname{Sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta ; \cos \alpha = -\cos \beta ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

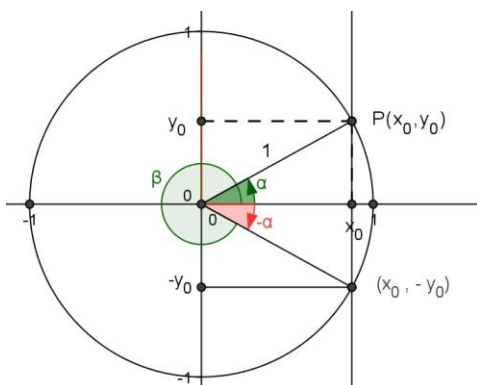


### Ejemplo. Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de $235^\circ$ :

$235^\circ - 180^\circ = 55^\circ$ , que está en el primer cuadrante. Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de  $55^\circ$  ya que son ángulos que difieren  $180^\circ$ :

$$\operatorname{sen} 235^\circ = -\operatorname{sen} 55^\circ ; \quad \cos 235^\circ = -\cos 55^\circ ; \quad \operatorname{tag} 235^\circ = \operatorname{tag} 55^\circ .$$

### ➤ Ángulos en el cuarto cuadrante. Razones trigonométricas de ángulos opuestos y de ángulos que difieren $360^\circ$ :



Sean dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\beta - \alpha = 360^\circ$  o  $\beta = -\alpha$  entonces se verifica que:

$$\operatorname{Sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta ; \cos \alpha = \cos \beta ; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

**Ejemplo.** Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de  $315^\circ$  y de  $-45^\circ$  :

$360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$  , que está en el primer cuadrante. Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de  $45^\circ$  ya que son ángulos que difieren  $360^\circ$ :

$$\operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ ; \quad \cos 315^\circ = \cos 45^\circ ; \quad \operatorname{tag} 315^\circ = -\operatorname{tag} 45^\circ .$$

Por otro lado  $-45^\circ$  es el ángulo opuesto de  $45^\circ$  y por tanto aplican las mismas fórmulas:

$$\operatorname{sen} -45^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ ; \quad \cos -45^\circ = \cos 45^\circ ; \quad \operatorname{tag} -45^\circ = -\operatorname{tag} 45^\circ .$$

## **Bloque 11.**

### **Tema 4: La materia que nos rodea**

#### **1.- PROPIEDADES DE LA MATERIA**

#### **2.- PROPIEDADES DE LOS MATERIALES**

#### **3.- ESTADOS DE AGREGACIÓN**

#### **4.- TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR**

#### **5.- LEYES DE LOS GASES**

##### **5.1.- LEY DE BOYLE-MARIOTTE.**

##### **5.2.- LEY DE CHARLES Y GAY-LUSSAC**

##### **5.3.- LEY DE GAY-LUSSAC**

##### **5.4.- ECUACIÓN GENERAL DE LOS GASES IDEALES**

#### **6.- INTERPRETACIÓN DE LAS LEYES DE LOS GASES**

## 1.- PROPIEDADES DE LA MATERIA

**Materia** es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.

Un objeto o cuerpo material es toda porción limitada de materia.

**Sustancia** es cada una de las diversas clases de materia que existen en la naturaleza.

Un libro, un árbol y un balón son ejemplos de objetos o cuerpos materiales (ocupan un lugar en el espacio) pero son diferentes porque no están formados por el mismo tipo de materia (no están formados por la misma sustancia).

Los cuerpos materiales pueden ser naturales o artificiales. Naturales son aquellos que se encuentran como se presentan en la naturaleza, como un árbol y artificiales aquellos que se han sido fabricados por el hombre, como un libro.

### • ACTIVIDAD 1:

¿Cuáles de las siguientes palabras se corresponden con el concepto de objeto y cuáles con el de sustancia?

|        |      |          |     |      |         |      |
|--------|------|----------|-----|------|---------|------|
| Madera | Mesa | Plástico | Oro | Taza | Falda   | Agua |
| Bolso  | Flor | Algodón  | Sal |      | Ventana |      |

La materia presenta unas cualidades que se denominan propiedades. Esas propiedades pueden ser generales y características.

**Propiedades generales** son aquellas que son comunes para todas las sustancias, no caracterizan a una sustancia en particular. Ejemplos de propiedades generales son: masa, volumen, temperatura, forma, peso...

Así, por ejemplo, podemos establecer la masa y el volumen de una sustancia de 60 g y 200 ml, respectivamente, pero estos no son datos característicos de esa sustancia ya que podemos tener objetos de distintas sustancias que tengan esa masa y volumen.

**Masa** es la cantidad de materia que tiene un objeto. La unidad de masa en el S.I. (Sistema Internacional) es el kilogramo (kg), y el aparato que se usa para medir masas es la balanza.

**Volumen** es el espacio que ocupa un cuerpo. La unidad de volumen en el S.I. es el metro cúbico ( $m^3$ ). Como el metro cúbico es una medida demasiado grande para el uso cotidiano también se emplea el litro (L), mililitro (mL) y el centímetro cúbico ( $cm^3$ )

Para medir el volumen de los líquidos se emplean probetas, recipientes de vidrio o plástico con una graduación. Al verter en ellas el líquido, el nivel que alcanza indica el volumen del líquido que contiene.

A veces se necesita medir una determinada cantidad de líquido con una mayor exactitud que la que se puede conseguir con una probeta. Para eso se emplean instrumentos especiales, siempre de vidrio, conocidos como buretas. Una bureta es un tubo largo de vidrio, graduado, y que termina en un grifo. Llenado de líquido, se abre el grifo y se vierte en otro recipiente. Se cierra el grifo y en la bureta se puede ver el volumen de líquido vertido.

Para medir el volumen de los sólidos si éstos son regulares (figuras geométricas), por ejemplo una canica, se aplican las fórmulas correspondientes que permiten calcular su volumen midiendo sus dimensiones.

Si el sólido es irregular, por ejemplo una piedra, se llena la probeta hasta un nivel determinado, después se pone en su interior el sólido, con lo que subirá el volumen que marca. La diferencia entre los volúmenes marcados después y antes de introducir el sólido será el volumen de éste.

**Propiedades características** de la materia, son aquellas propiedades que permiten diferenciar unas sustancias de otras. Ejemplos de propiedades características son:

**Densidad:** masa de un cuerpo por unidad de volumen. Se determina mediante la siguiente relación:

$$d = m/v \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \text{densidad} \\ m = \text{masa} \\ v = \text{volumen} \end{array} \right.$$

Se expresa en el S.I. en  $\text{kg/m}^3$ , También se suele expresar en  $\text{g/cm}^3$ .

**Punto de fusión de un sólido o Punto de congelación de un líquido** es la temperatura a la que el estado sólido y el estado líquido de una sustancia coexisten en equilibrio. El punto de fusión (o congelación) de una sustancia depende de la presión. El punto de fusión (o congelación) normal de una sustancia es la temperatura a la cual una sustancia se funde (o congela) a 1 atm (atmósfera) de presión. Por lo general se omite la palabra “normal” cuando la presión es de 1 atm.

**Punto de ebullición** es la temperatura a la cual la presión de vapor de un líquido es igual a la presión externa. El punto de ebullición normal de un líquido es la temperatura a la cual hierve cuando la presión externa es de 1 atm.

**Solubilidad:** Cantidad máxima de soluto que se puede disolver en una cantidad de disolvente señalada a una temperatura determinada. Se expresa generalmente en g de soluto/100  $\text{cm}^3$  de disolvente.

## 2.- PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Cada material tiene unas propiedades que lo diferencian de los demás y que determinan para que se puede utilizar

Las propiedades de un material se definen como el conjunto de características que hacen que se comporte de una manera determinada ante estímulos externos como la luz, el calor, la aplicación de fuerzas, el medio ambiente, la presencia de

otros materiales, etc. Para poder definir todas las propiedades las hemos clasificado en físicas, químicas y ecológicas.

- **Propiedades físicas:** estas propiedades se ponen de manifiesto ante estímulos como la electricidad, la luz, el calor o la aplicación de fuerzas

**Propiedades eléctricas:** Son las que determinan el comportamiento de un material ante el paso de la corriente eléctrica.

La conductividad eléctrica es la propiedad que tienen los materiales de transmitir la corriente eléctrica. Se distinguen de esta manera en materiales conductores y materiales aislantes. Todos los metales son buenos conductores de la corriente eléctrica y los materiales plásticos y maderas se consideran buenos aislantes.

**Propiedades ópticas:** Se ponen de manifiesto cuando la luz incide sobre el material. Dependiendo del comportamiento de los materiales ante la luz, tenemos:

**Materiales opacos:** no se ven los objetos a través de ellos, ya que no permiten el paso de la luz.

**Materiales transparentes:** los objetos se ven claramente a través de estos, pues dejan que pase la luz.

**Materiales translúcidos:** estos materiales permiten el paso de la luz, pero no permiten ver con nitidez lo que hay detrás de ellos.

**Propiedades térmicas:** Determinan el comportamiento de los materiales ante el calor.

La conductividad térmica es la propiedad de los materiales de transmitir el calor. Algunos materiales como los metales son buenos conductores térmicos, mientras que algunos plásticos y la madera son buenos aislantes térmicos.

La **dilatación**, consiste en el aumento de tamaño que experimentan los materiales con el calor, la **contracción** consiste en la disminución de tamaño que experimentan los materiales cuando se descende la temperatura y la **fusibilidad** es la propiedad de los materiales de pasar del estado sólido al líquido al elevar la temperatura.

**Propiedades mecánicas:** Describen el comportamiento de los materiales cuando se los somete a la acción de fuerzas exteriores.

La **elasticidad** es la propiedad de los materiales de recuperar su tamaño y forma originales cuando deja de actuar sobre ellos la fuerza que los deformaba.

La **plasticidad** es la propiedad de los cuerpos para adquirir deformaciones permanentes cuando actúa sobre ellos una fuerza.

La **dureza**, se define como la resistencia que opone un material a ser rayado. La **resistencia mecánica**, es la propiedad de algunos materiales de soportar fuerzas sin romperse.

La **tenacidad** y **fragilidad**, son la resistencia o fragilidad que ofrecen los materiales a romperse cuando son golpeados.

**Propiedades acústicas:** Son las propiedades que determinan el comportamiento de los materiales ante un estímulo externo

La conductividad acústica es la propiedad de los materiales a transmitir el sonido.

Otras propiedades:

La **porosidad**, es la propiedad que presentan los materiales que tienen poros (huecos en su estructura) e indica la cantidad de líquido que dicho material puede absorber o desprender. La madera y los materiales pétreos y cerámicos son porosos.

La **permeabilidad**, es la propiedad de los materiales que permiten filtrar a través de ellos líquidos. Los que no permiten el paso de los líquidos se denominan impermeables.

- **Propiedades químicas:** Se manifiestan cuando los materiales sufren una transformación debido a su interacción con otras sustancias.

**Oxidación:** Es la propiedad química que más nos interesa, pues es la facilidad que tiene un material de oxidarse, es decir, de reaccionar con el oxígeno del aire o del agua. Los metales son los materiales que más fácilmente se oxidan.

- **Propiedades ecológicas:** según el impacto que los materiales producen en el medio ambiente, se clasifican en reciclables, tóxicos, biodegradables y renovables.

- **Reciclables:** son los materiales que se pueden reutilizar. El vidrio, el papel, el cartón, el metal y los plásticos son ejemplos de materiales reciclables.

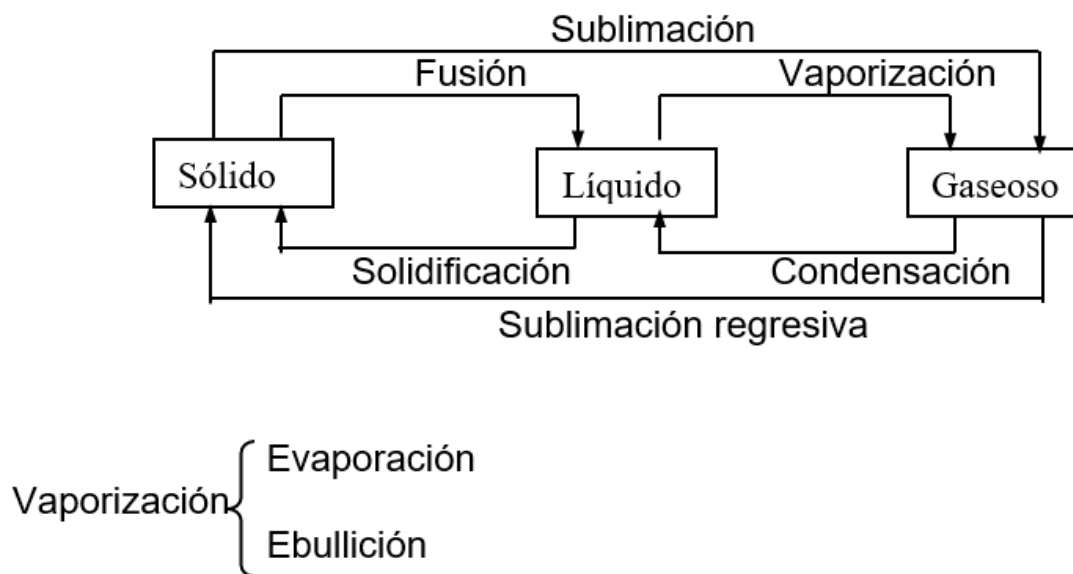
- **Tóxicos:** Estos materiales son nocivos para el medio ambiente, ya que pueden resultar venenosos para los seres vivos y contaminan el agua, el suelo y la atmósfera.

- **Biodegradables:** Son aquellos materiales que con el paso del tiempo se descomponen de forma natural.

- **Renovables:** Son las materias primas que existen en la naturaleza de forma ilimitada, como el sol, las olas, las mareas, el aire... y por el contrario están las no renovables, pues pueden agotarse, como el petróleo, el carbón ...

### 3.- ESTADOS DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

Una de las propiedades más evidentes de las sustancias es la que pueden existir como sólidos, líquidos o gases. Se dice habitualmente que éstos son los tres estados de agregación de la materia. Muchas sustancias, bajo las condiciones apropiadas, pueden existir en los tres estados. Cuando se enfría un gas, se condensa para formar un líquido, y finalmente se congela para dar un sólido, pero en todos estos cambios, continúa siendo la misma sustancia. El agua existe en los tres estados en la superficie de la tierra. El agua gaseosa (vapor de agua) está presente en la atmósfera, el agua líquida forma ríos, lagos y océanos y el agua sólida (hielo) se encuentra como nieve, en los glaciares y en las superficies heladas de lagos y océanos.



- **Evaporación:** Afecta sólo a la superficie libre del líquido y tiene lugar a cualquier temperatura.
- **Ebullición:** Afecta a todo el líquido y tiene lugar a una cierta temperatura, aunque ésta depende de la presión exterior.

Las características de los tres estados basadas en descripciones macroscópicas, es decir, que pueden constatarse sin utilizar más que los propios sentidos humanos sin ayudas auxiliares, son las siguientes:

**Gases:** - ..Carecen de forma definida.

- No poseen un volumen propio.
- Son expansibles y compresibles, es decir, tienden a ocupar totalmente el recipiente en el que se introduzcan, y si se reduce el volumen del recipiente, el gas se comprime fácilmente y se adapta al menor volumen.

**Líquidos:** - Carecen de forma definida.

- Poseen su propio volumen definido.
- Son poco o nada compresibles y expansibles.

**Sólidos:** - Tienen forma propia.

- Tienen un volumen definido.
- No son compresibles ni expansibles, a no ser que se ejerza sobre ellos fuerzas de gran intensidad.

Tanto los gases como los líquidos tienen la propiedad de adaptarse a la forma del recipiente que los contienen, así como la de escapar por un orificio que se practique en el recipiente, por lo que reciben el nombre de fluidos.

Normalmente, un líquido tiene una densidad mucho mayor ( 700 a 1.700 veces) que un gas, mientras que un sólido tiene una densidad ligeramente mayor que un líquido.

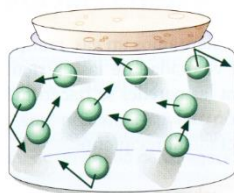
Esta sería una curva de calentamiento típica, desde el estado sólido al estado gaseoso de una sustancia, pasando por el estado líquido.



## 4.- TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR

En 1.857, el físico alemán R. Clausius desarrolló un modelo que pretendía explicar la naturaleza de la materia y reproducir su comportamiento. Se conoce como teoría cinético-molecular o teoría cinética, y fue desarrollada inicialmente para los gases. Puede resumirse en las siguientes premisas:

- Los gases están formados por partículas (átomos o moléculas) que se encuentran a grandes distancias en comparación con su tamaño, por lo que el volumen realmente ocupado por las moléculas es despreciable frente al volumen total, es decir, la mayor parte del volumen ocupado por un gas es espacio vacío.



- La moléculas están en un continuo movimiento aleatorio. Se desplazan en línea recta chocando entre sí y contra las paredes del recipiente. Estos choques son elásticos, es decir, en el choque una molécula puede ganar energía y la otra perderla, pero la energía total permanece constante.

- Las fuerzas atractivas de cohesión entre las moléculas, o fuerzas intermoleculares, son muy débiles o nulas.

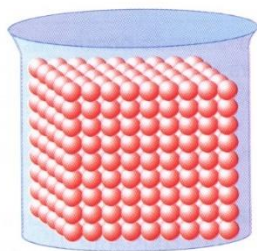
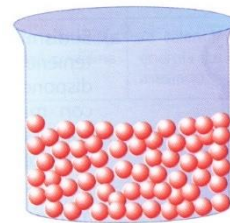
- La temperatura es proporcional a la energía cinética media de las moléculas y por tanto a la velocidad media de las mismas.

- ( $E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ )

- La presión ejercida por un gas es proporcional al número de choques por unidad de superficie de las moléculas contra las paredes del recipiente que lo contiene.

❖ Este modelo también es aplicable a sólidos y líquidos:

- ❖ En una sustancia gaseosa, las fuerzas atractivas intermoleculares son muy débiles y su influencia sobre el movimiento de las moléculas es despreciable ya que se desplazan a gran velocidad. Sin embargo; al enfriar el gas, la velocidad de sus moléculas se reduce, lo que hace que las fuerzas intermoleculares cobren importancia dando como resultado que las moléculas dejen de moverse independiente y aleatoriamente. Cuando la temperatura se hace lo suficientemente baja, las moléculas están en contacto y a pesar de no poder moverse independientemente siguen teniendo la suficiente energía cinética para poder desplazarse unas respecto de otras y el gas pasa al estado líquido.



Si la temperatura se hace más baja, las fuerzas intermoleculares son muy intensas lo que obliga a que las moléculas, queden atrapadas en una posición fija y sólo tengan libertad de girar y oscilar ligeramente en torno a esas posiciones medias, adoptando por lo general, una disposición ordenada característica de la mayoría de los sólidos.

- ❖ Con la teoría cinético-molecular se pueden explicar las características de cada estado:

**Sólidos:** Dado que las partículas se encuentran muy próximas y no pueden desplazarse, los sólidos tienen una forma y volumen propios, no son compresibles ni expansibles, son relativamente duros y rígidos y su densidad es alta.

**Líquidos:** Dado que las partículas se encuentran muy próximas y pueden desplazarse unas sobre otras, no tienen volumen propio pero se adaptan a la forma del recipiente que las contiene y su densidad es algo menor que la de los sólidos.

**Gases:** Como las fuerzas de atracción son muy débiles, las partículas están muy separadas unas de otras y se mueven en todas las direcciones y dado que no hay nada que retenga las partículas próximas entre sí, los gases se expanden hasta llenar el recipiente, y por existir grandes distancias entre ellas, son fácilmente compresibles y su densidad es mucho menor que la de los sólidos y líquidos.

## 5.- LEYES DE LOS GASES

Cualquier muestra dada de un gas puede describirse en función de cuatro propiedades fundamentales: masa, volumen, presión y temperatura. La investigación de estas propiedades con el aire condujo a establecer relaciones cuantitativas entre ellas, válidas para todos los gases.

**5.1.- LEY DE BOYLE-MARIOTTE: PRESION Y VOLUMEN**

El que los gases son compresibles es un hecho familiar. Cuando se aumenta la presión sobre una cantidad dada de un gas, como sucede en una bomba neumática, el volumen del gas disminuye: cuanto mayor es la presión menor se hace el volumen. En 1.660, el químico inglés Robert Boyle estudió los efectos de la presión sobre el volumen de aire, observó que cuando duplicaba la presión el volumen de aire se reducía a la mitad; si la presión se multiplica por cuatro el volumen se reduce a la cuarta parte de su valor original, etc. Esta relación ha resultado ser válida para cualquier gas.

En otras palabras, lo que Boyle encontró es que:

**Para una determinada masa de gas el volumen es inversamente proporcional a la presión ejercida, si la temperatura se mantiene**

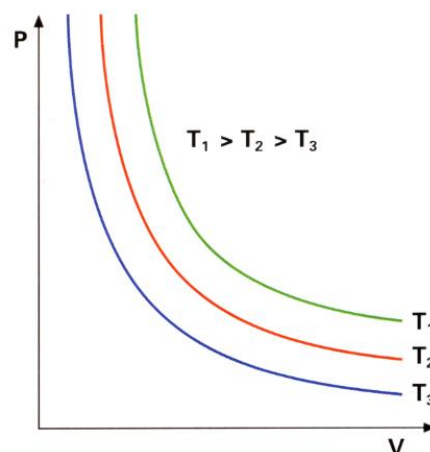
$$V = \text{constante} \cdot 1 / P \quad ; \quad (T \text{ y } m \text{ constantes})$$

**constante:**

Se puede enunciar también de la siguiente forma:

**"Para una misma masa de un gas a temperatura constante el producto del volumen del gas por la presión que ejerce es constante"**

$$P \cdot V = \text{constante} \quad (T \text{ y } m \text{ constantes})$$



Esta relación es conocida como Ley de Boyle-Mariotte.

Una forma conveniente de escribir la ley de Boyle para comparar la misma muestra de gas, a temperatura constante, bajo diferentes condiciones de presión y volumen, es:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 = P_3 \cdot V_3 \quad ; \quad (T \text{ y } m \text{ constantes})$$

Si la presión y el volumen de una cantidad dada de un gas son inicialmente  $P_1$  y  $V_1$  y la presión se cambia hasta  $P_2$ , el nuevo volumen  $V_2$ , viene dado por esta relación.

- ❖ *El hecho de que un gas es compresible repercute en su densidad; cuanto más se comprime tanto más denso se hace. Ello es debido a que el mismo número de moléculas y la misma masa ocupan un volumen menor. Por ejemplo, el aire que se encuentra directamente sobre la superficie de la tierra está comprimido por la masa de aire que se encuentra sobre él; por tanto, cuanto mayor es la altura menos comprimido está el aire. El resultado es que la densidad y la presión del aire decrecen conforme aumenta la altitud. Así, a nivel del mar es de 1 atm, y a 2.500 m ( en las Montañas Rocosas) la presión es de sólo 0,75 atm y a 8.000 m ( en el Himalaya, donde están las cimas más altas del mundo) la presión atmosférica es de únicamente 0,47 atm.*

• **ACTIVIDAD 2:**

Calcula el volumen ocupado por una muestra de hidrógeno a 3,00 atm si dicha muestra tiene un volumen de 6,20 l a una presión de 1,05 atm.

Solución.- 2,17 L.

## 5.2.- LEY DE CHARLES y GAY-LUSSAC: TEMPERATURA Y VOLUMEN

Unos cien años después del trabajo de Boyle, Charles y Gay-Lussac investigaban el efecto que produce en el volumen el cambio de la temperatura de una cantidad dada de aire para la que la presión se mantuviera constante. Encontraron que el gas se expandía al calentarse. El volumen del gas se va contrayendo a medida que la temperatura descende pero si ésta es lo suficientemente baja, el gas se licúa (la recta se corta). Si prolongamos la recta obtenemos por extrapolación que la temperatura a la cual el volumen de cualquier gas debería ser nulo es  $-273^{\circ}\text{C}$ .

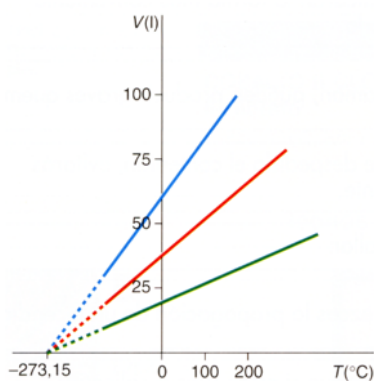


Figura a

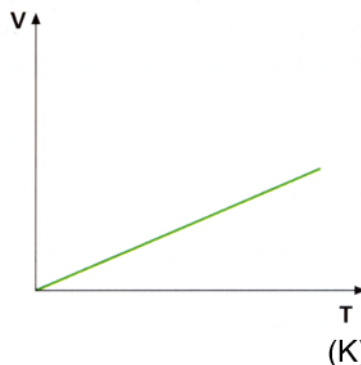


Figura b

En la práctica, todos los gases se condensan para dar líquidos y sólidos a temperaturas superiores a los  $-273^{\circ}\text{C}$  por lo que, de hecho, ningún gas puede ser enfriado hasta que se anule su volumen. Sin embargo, la idea de que existe una temperatura que es la mínima posible- es decir, un cero absoluto de temperaturas- es de extraordinaria importancia. En lugar de escoger arbitrariamente el punto de fusión del hielo como el cero de la escala de temperaturas, como se hace en la escala Celsius, es posible escoger de forma lógica y conveniente el cero absoluto como cero de una escala de temperaturas. Esta elección del cero constituye la base de la escala absoluta o kelvin de temperaturas que fue sugerida por primera vez por el científico británico Lord Kelvin (1824-1.907).

De acuerdo con medidas precisas, el cero absoluto de temperaturas es  $-273,15^{\circ}\text{C}$ .

Así,  $0\text{ K} = -273,15^{\circ}\text{C}$ , y la escala Kelvin (K) se relaciona con la Celsius mediante la expresión:

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273$$

$$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273$$

Debe observarse que, por convenio, el signo de grado ( $^{\circ}$ ) no se utiliza cuando se expresan las temperaturas en la escala Kelvin. La unidad en la escala absoluta es el Kelvin (K) y una temperatura tal como 100 K se lee como "cien Kelvins".

Cuando la temperatura se expresa en la escala absoluta el volumen de un gas resulta directamente proporcional a la temperatura (figura b), lo que no se cumple si la temperatura se mide en la escala Celsius. Esta expresión se resume en la Ley de Charles y Gay-Lussac:

**"Para una determinada cantidad (masa) de un gas que se mantiene a presión constante, el volumen es proporcional a su temperatura en la escala Kelvin".**

$$V = \text{constante} \cdot T, \quad (P \text{ y } m \text{ constantes})$$

$$V / T = \text{constante}, \quad (P \text{ y } m \text{ constantes})$$

Una forma conveniente de escribir la ley de Charles y Gay-Lussac para comparar la misma muestra de gas, a presión constante, bajo diferentes condiciones de volumen y temperatura, es:

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2, \quad (P \text{ y } m \text{ constantes})$$

- **ACTIVIDAD 3:**

¿A qué temperatura debe enfriarse una muestra de nitrógeno de 400 ml de volumen a 25°C para que su volumen se reduzca hasta 350 ml?

Sol.- 116 K = -157 °C.

- ❖ Puesto que el volumen de un gas depende tanto de la presión como de la temperatura, decir que una cierta muestra de gas ocupa un volumen concreto no resulta suficiente, la presión y la temperatura también deben ser especificadas. Para que las comparaciones resulten más sencillas, lo que se suele hacer es referir el volumen de una muestra dada de un gas a 0 °C (273,15 K) y 1 atm; estas condiciones son conocidas como **condiciones normales** (lo que se suele abreviar como **c.n.**).

### 5.3.- LEY DE GAY-LUSSAC: PRESION Y TEMPERATURA

Gay-Lussac también estudió el efecto que produce en la presión el cambio de la temperatura de una cantidad dada de aire manteniendo el volumen constante. Encontró que la presión del gas aumentaba uniformemente al calentarse.

Si la temperatura se expresa en °C se obtiene una función lineal como muestra la figura a, mientras que si se expresa en K, se observa que la presión es directamente proporcional a la temperatura absoluta ( figura b).

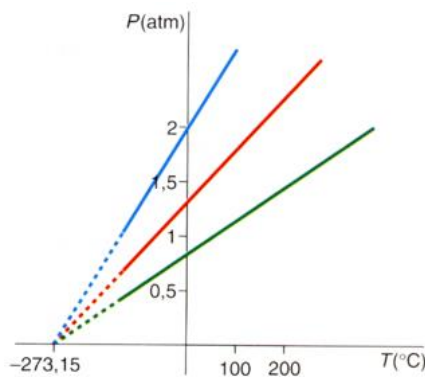


Figura a

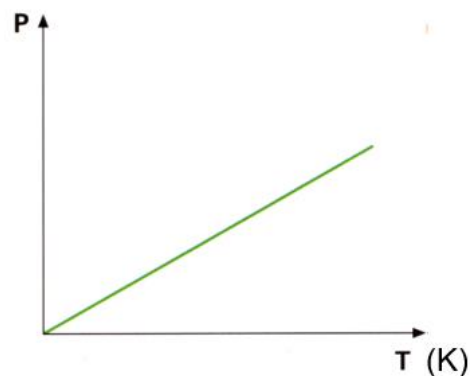


Figura b

**"Para una determinada cantidad (masa) de un gas que se mantiene a volumen constante, la presión es proporcional a su temperatura en la escala Kelvin".**

$$P = \text{constante} \cdot T \quad ; (V \text{ y } m \text{ constantes})$$

$$P / T = \text{constante} \quad , (V \text{ y } m \text{ constantes})$$

Para la misma muestra de gas, a volumen constante, bajo diferentes condiciones de presión y temperatura:

$$P_1 / T_1 = P_2 / T_2 \quad , (V \text{ y } m \text{ constantes})$$

#### 5.4.-ECUACIÓN GENERAL DE LOS GASES IDEALES

Combinando las leyes vistas anteriormente:

$P \cdot V = \text{constante}$  ( para  $T$  y  $m$  constantes): Ley de Boyle

$V / T = \text{constante}$  (para  $P$  y  $m$  constantes): Ley de Charles y Gay-Lussac

$P / T = \text{constante}$  (para  $V$  y  $m$  constantes): 2ª Ley de Gay-Lussac

$V = n \cdot \text{constante}$  (para  $P$  y  $T$  constantes): Ley de Avogadro

se obtiene la ecuación conocida como ecuación general de los gases ideales:

$$\frac{P \cdot V}{n \cdot T} = \text{constante} \quad \text{o bien} \quad \rightarrow \quad P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

donde  $R$  es una constante denominada constante de los gases. Si la presión se expresa en atmósferas, el volumen en litros y la temperatura en K, el valor de  $R$  es de 0,082 atm.l/mol.K, mientras que en el S.I. el valor de  $R = 8,3 \text{ J / mol}\cdot\text{K}$

Para una cantidad determinada de gas, la ley de los gases ideales puede expresarse también en función de las condiciones iniciales y las finales:

$$P_1 V_1 / T_1 = P_2 \cdot V_2 / T_2 \quad ; \quad (m = \text{constante})$$

- ❖ La ecuación de los **gases ideales**, se cumple estrictamente para los llamados gases ideales: gases hipotéticos en los que el tamaño de las moléculas es absolutamente despreciable frente a la distancia existente entre las moléculas (volumen nulo) y en el que además no existieran fuerzas intermoleculares. Sin embargo, el comportamiento de los gases reales difiere ligeramente del ideal a causa del tamaño de las moléculas y también porque existen fuerzas intermoleculares. No obstante, para todos los cálculos que se efectúan normalmente, puede suponerse que los gases reales se comportan como se fueran ideales. La ecuación de los gases ideales se aplica con bastante exactitud a todos los gases cuando se encuentran a presiones muy bajas y temperaturas elevadas, es decir, cuando las moléculas están muy alejadas unas de otras y se desplazan con velocidades elevadas. Sigue siendo una buena aproximación bajo la mayoría de las condiciones posibles, pero se hace menos exacta cuando las presiones son muy elevadas y las temperaturas muy bajas. A presiones muy elevadas ya no se puede seguir considerando despreciable el volumen de las moléculas frente a las distancias intermoleculares. Por tanto, el volumen de un gas resulta ser algo mayor que lo esperado de acuerdo con la ley de Boyle. A temperaturas muy bajas las moléculas se mueven lentamente y su energía cinética es pequeña. Entonces, incluso fuerzas intermoleculares débiles hacen que las moléculas se mantengan unidas en cierta medida y el volumen del gas es algo menor que el predicho por la ley de Charles.

A partir de la ley de los gases ideales se pueden deducir las leyes anteriores, sin más que hacer constantes las correspondientes variables:

Si  $T$  y  $m$  ( $n$ ) son constantes:  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T = \text{cte} \cdot \text{cte} \cdot \text{cte} = \text{cte}$  ;  $P \cdot V = \text{cte}$       Ley de Boyle

Si  $P$  y  $m$  ( $n$ ) son constantes:  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$  ;  $\text{cte} \cdot V = \text{cte} \cdot \text{cte} \cdot T$  ;  $V / T = \text{cte}$       Ley de Charles

Si  $V$  y  $m$  ( $n$ ) son constantes:  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$  ;  $P \cdot \text{cte} = \text{cte} \cdot \text{cte} \cdot T$  ;  $P / T = \text{cte}$       2ª ley de Gay-Lussac

Si  $P$  y  $T$  son constantes:  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$  ;  $\text{cte} \cdot V = n \cdot \text{cte} \cdot \text{cte}$  ;  $V = n \cdot \text{cte}$       Ley de Avogadro

#### • ACTIVIDAD 4:

Calcular el número de moles de hidrógeno contenido en una muestra de 100 cm<sup>3</sup> a una temperatura de 300 K y una presión de 750 mmHg.      Sol.- 4,01.10<sup>-3</sup> moles.

• **ACTIVIDAD 5:**

Calcular la presión que ejercen 3,00 g de N<sub>2</sub> gas en un recipiente de 2,00 l de capacidad a la temperatura de -23 °C.

Dato: Ar(N)= 14.

Sol.- 1,10 atm.

• **ACTIVIDAD 6:**

Si una muestra de oxígeno gaseoso tiene un volumen de 425 ml a 70 °C y 0,950 atm de presión, ¿cuál será su volumen en c. n.?. Sol.- 321,4 ml.

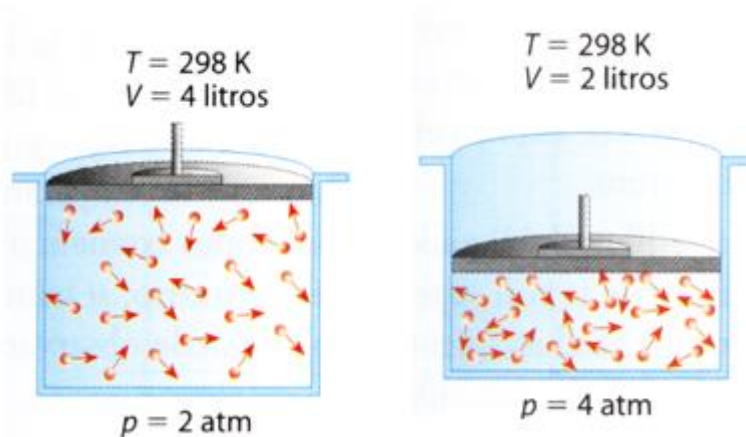
## 6.- INTERPRETACIÓN DE LAS LEYES DE LOS GASES POR LA TEORÍA CINÉTICA

El hecho de que haya grandes distancias entre las moléculas de los gases y que las fuerzas intermoleculares sean muy débiles, despreciables, hace que las moléculas sean independientes unas de otras, por lo que las propiedades de los gases son independientes de la naturaleza de los mismos, es decir, todos los gases se comportan del mismo modo. Por el contrario, en un sólido o en un líquido, las propiedades dependen de la intensidad de las fuerzas intermoleculares, así como del tamaño y forma de las moléculas.

a) Ley de Boyle-Mariotte ( $P \cdot V = \text{cte}$ , para m y T ctes):

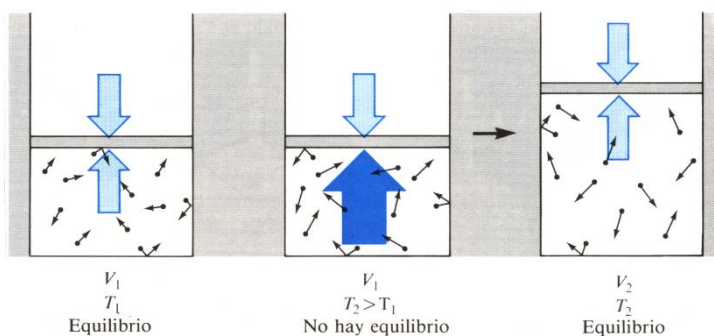
Supongamos que tenemos una cierta masa de gas encerrada en un recipiente cuya cubierta superior está provista de un émbolo móvil. Al reducir el volumen a la mitad manteniendo constante la temperatura, y por tanto las moléculas moviéndose a la misma velocidad, el número de colisiones por unidad de superficie que se producirán contra las paredes del recipiente será el doble, ya que el

espacio se ha reducido a la mitad. En consecuencia la presión alcanzará un valor doble de la original.

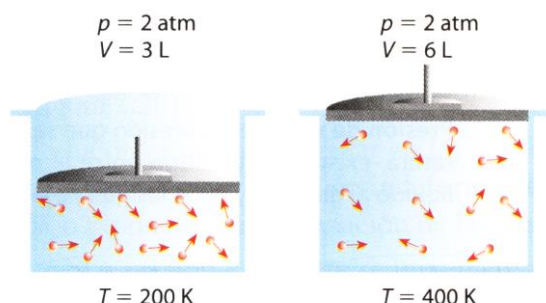


b) Ley de Charles y Gay-Lussac ( $V = \text{cte} \cdot T$ , para m y P ctes):

Si tenemos una cierta masa de gas encerrada en un recipiente provisto de un émbolo móvil a una cierta temperatura, las moléculas chocarán contra las paredes del recipiente y el émbolo ejerciendo una cierta presión que equilibra a la presión atmosférica exterior. Al calentar el gas, las

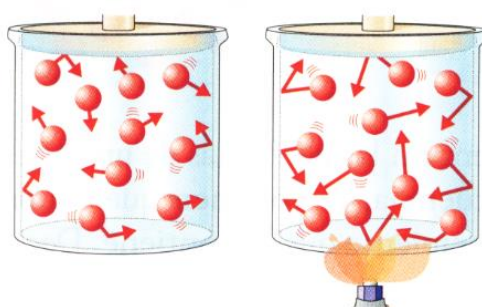


partículas se mueven más deprisa, produciéndose un mayor número de choques contra el émbolo, y por tanto, un aumento de la presión interior que superará a la presión atmosférica exterior, lo que hace que el émbolo se desplace con el consiguiente aumento de volumen. Este aumento de volumen reduce el número de colisiones contra el émbolo y por tanto se reduce la presión interior. De esta forma, el desplazamiento del émbolo tiene lugar hasta que la presión interior vuelve a equilibrarse con la presión exterior. Así pues, a presión constante, el volumen aumenta conforme lo hace la temperatura.



c) 2ª Ley de Gay-Lussac (  $P = \text{cte} \cdot T$  , para  $m$  y  $V$  ctes)

Supongamos un recipiente de volumen constante que contiene una cierta masa de gas. Al aumentar la temperatura aumenta la velocidad de las moléculas, produciéndose un mayor número de choques contra las paredes del recipiente, lo que origina un aumento de la presión.



d) Cero absoluto de temperaturas (límite inferior de temperaturas)

Al enfriar un gas la velocidad y la energía cinética media de sus moléculas disminuye, por lo que debe alcanzarse una temperatura a la cual la energía cinética y la velocidad se anulen. Lógicamente, no pueden disminuirse más allá de este límite, y ésta debe ser la temperatura más baja que puede alcanzarse ( cero absoluto =  $0 \text{ K}$  ).

• **Actividad 7**

¿Por qué al arder la llama de una vela, la cera más próxima a esta llama está líquida?

• **Actividad 8**

a) ¿Por qué una sustancia como el agua puede encontrarse en los tres estados?

b) ¿Qué le ocurre a sus moléculas?

c) La siguiente lista de temperaturas esta expresada en grados Kelvin y en grados Celsius, empareja aquellas que hagan referencia al mismo valor.

a)  $37^{\circ}\text{C}$     b)  $0^{\circ}\text{C}$     c)  $-273^{\circ}\text{C}$     d)  $25^{\circ}\text{C}$  e)  $110^{\circ}\text{C}$

1)  $298\text{K}$     2)  $310\text{K}$  3)  $0\text{K}$     4)  $383\text{K}$     5)  $273\text{K}$

• Actividad 9

a) 4 litros de un gas están a una presión de  $600\text{mmHg}$  ¿Cuál será su nuevo volumen cuando la presión aumente hasta  $800\text{mmHg}$ ?

b) En un rifle de aire comprimido se logran encerrar  $150\text{ cm}^3$  de aire que se encontraban a presión normal y que ahora pasan a ocupar un volumen a  $25\text{cm}^3$  ¿Qué presión ejerce el aire?

• Actividad 10

Cierto volumen de un gas se encuentra a una presión de  $970\text{ mmHg}$  cuando su temperatura es de  $25.0^{\circ}\text{C}$ . ¿A qué temperatura deberá estar para que su presión sea  $760\text{ mmHg}$ ?

Dentro de las cubiertas de un coche el aire está a  $15^{\circ}\text{C}$  de temperatura y  $2\text{ atmósferas}$  de presión. Calcular la presión que ejercerá ese aire si la temperatura, debido al rozamiento sube a  $45^{\circ}\text{C}$ .

Una masa gaseosa ocupa un volumen de  $250\text{cm}^3$  cuando su temperatura es de  $-5^{\circ}\text{C}$  y la presión  $740\text{mmHg}$ . ¿Qué presión ejercerá esa masa gaseosa si, manteniendo constante el volumen, la temperatura se eleva a  $27^{\circ}\text{C}$ ?

• Actividad 11

Un gas tiene un volumen de  $2.5\text{ L}$  a  $25^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuál será su nuevo volumen si bajamos la temperatura a  $10^{\circ}\text{C}$ ?

Una cierta cantidad de gas, que ocupa un volumen de  $1\text{L}$  a la temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$  y a  $760\text{mmHg}$  de presión, se calienta hasta  $150^{\circ}\text{C}$  manteniendo la presión constante. ¿Qué volumen ocupará en estas últimas condiciones?

• Actividad 12

Un gas, a temperatura constante, ocupa un volumen de  $50\text{ l}$  a la presión de  $2\text{ atm}$ . ¿Qué volumen ocupará si duplicamos la presión?

Al calentar un recipiente que estaba a  $300\text{ K}$ , la presión del gas que contiene pasa de  $2$  a  $10\text{ atm}$ . ¿Hasta qué temperatura se ha calentado?

Manteniendo constante la presión, se ha duplicado el volumen del gas.

¿Qué le habrá pasado a su temperatura?

*¿Qué volumen ocuparán 2 moles de gas a 5 atm de presión y a una temperatura de 500 K?*

*Un gas, a temperatura constante, ocupa un volumen de 20 l a la presión de 3 atm. ¿Qué volumen ocupará si la presión pasa a ser de 5 atm?*

*Al calentar un recipiente que estaba a 100 °C, la presión del gas que contiene pasa de 2 a 8 atm. ¿Hasta qué temperatura se ha calentado?*

*¿Qué presión ejercerán 2 moles de gas si ocupan 10 l a una temperatura de 300 K?*

*A una presión de 2026 mb y una temperatura de 0 °C, un gas ocupa un volumen de 5 l. ¿Cuántos moles de gas hay presentes?*

## Bloque 11.

- Tema 5 Genética y evolución.

### ÍNDICE

1.- LA CÉLULA. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS. PROCARIOTA Y EUCARIOTA.

2.- NÚCLEO

3.- LOS PROCESOS DE LA DIVISIÓN CELULAR: LA MITOSIS Y LA MEIOSIS

4.- EL ADN Y LA HERENCIA GENÉTICA

4.1.- LOS CROMOSOMAS Y EL ADN

4.2.- EL CÓDIGO GENÉTICO. GEN

5.- LAS LEYES DE LA HERENCIA

5.1.- LA HERENCIA DEL SEXO

5.2.- DE LA SANGRE

6.- GENÉTICA Y SOCIEDAD: (CORTAR Y PEGAR ADN)

6.1.- LA INGENIERÍA GENÉTICA

6.2.- LOS ALIMENTOS TRANSGÉNICOS

7.- LA EVOLUCIÓN DE LOS SERES VIVOS

## PRESENTACIÓN

La unidad anatómica y fisiológica de todo ser vivo es la **célula**. Las células sin núcleo verdadero son las **procariotas** y la que si lo tienen se denominan **eucariotas**.

Conoceremos cómo se dividen y como se transmiten la información a través del ADN, material que forma los cromosomas.

Los seres vivos cambian continuamente y evolucionan. Probablemente a partir de una única célula primitiva se han desarrollado todas las formas de vida que hoy conocemos (actuales y desaparecidas) incluido el Hombre

## 1.- LA CÉLULA. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS

Gracias al microscopio se conoce la estructura de los seres vivos. Por ello se sabe que en todos los seres vivos se repiten unas unidades estructurales que se llaman células. Todas las células cumplen las mismas funciones del ser vivo: nutrición, relación y reproducción.

La célula procariota es la célula más primitiva, por lo que es el tipo de célula más sencillo. Se caracteriza por no poseer un núcleo diferenciado, rodeado por una membrana. En cambio, el material genético (ADN) se encuentra disperso por el citoplasma. Prácticamente todos los organismos basados en células procariotas son unicelulares.

La célula eucariota sí tiene un núcleo rodeado por una membrana, dentro del cual se encuentra el ADN. La mayor parte de las células con eucariotas, como las células de los animales y de las plantas verdes, y en ellas podemos distinguir principalmente las siguientes partes: Membrana, citoplasma y núcleo.

## 2.- NÚCLEO

Se encuentra en el centro de la célula y es, generalmente, de forma esférica. En él se encuentran los caracteres hereditarios y, además, dirige toda la actividad que tiene lugar en el citoplasma.

En el núcleo podemos distinguir:

**Membrana Nuclear.** Es la que envuelve al núcleo y lo separa del citoplasma.

**Cromosomas.** Son estructuras individuales que existen en el núcleo de la célula y que son portadores del patrimonio genético del individuo a través del ADN (ácido desoxirribonucleico).

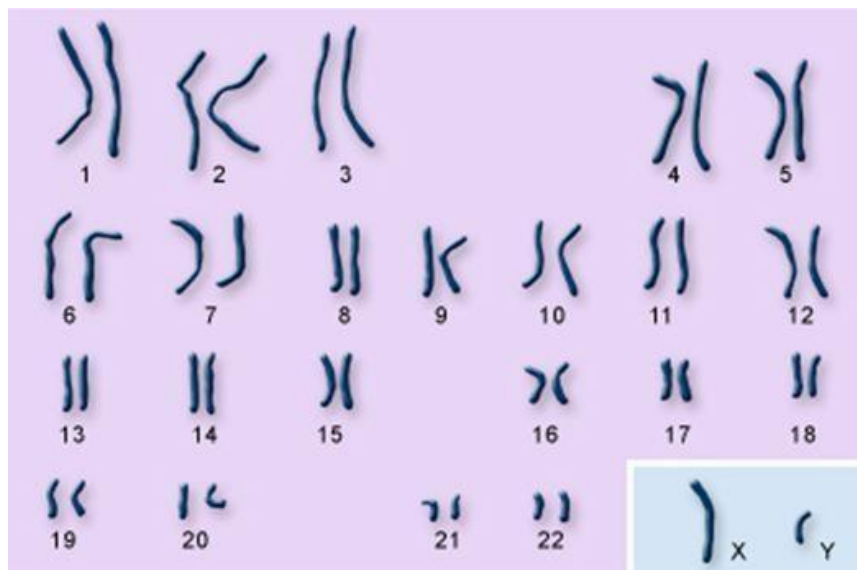
**Nucleolos.** Contienen ARN (ácido ribonucleico) que es el que interviene en la fabricación de las proteínas.

### 3.- Los procesos de la división celular: la mitosis y la meiosis

#### 3.1.- La mitosis

Es un proceso de división celular, propio de las células eucariotas, mediante el cual una célula madre da lugar a dos células hijas, idénticas a la célula madre, con la misma información genética.

Este proceso se produce en células diploides. Una célula diploide es aquella que tiene pares de cromosomas (en general,  $2n$  cromosomas). Las células humanas diploides tienen 23 pares de cromosomas (por tanto, 46 cromosomas). Todas las células humanas a excepción de las reproductoras (espermatozoides y óvulos) son diploides.



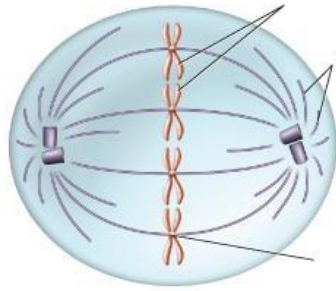
Cromosomas células diploides

Este tipo de división se utiliza para:

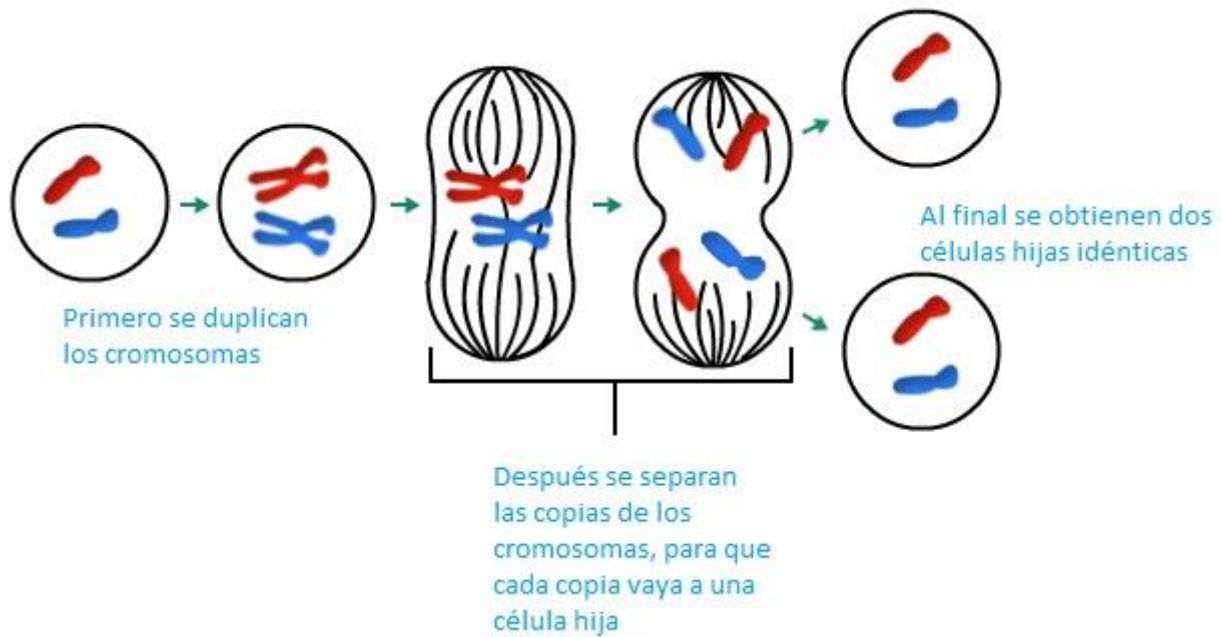
- Reproducción de muchos seres unicelulares.
- Desarrollo y crecimiento de organismos pluricelulares (cuando crecemos, nuestras células de tejidos y órganos como la piel, pulmones, etc se reproducen por mitosis, de forma que va creciendo el número de células de nuestro organismo)

Cada mitosis tiene una fase inicial, durante la cual los cromosomas se duplican, quedando formado cada cromosoma por dos cromátidas, lo que asegura que las dos células hijas obtengan exactamente la misma información genética de la célula madre. Cuando se duplica un cromosoma en esta fase, queda unido a su copia, formando dos cromátidas unidas por lo que se denomina centrómero.

Posteriormente, los centriolos se encargan de separar las cromátidas de cada cromosoma replicado, para asegurarse de



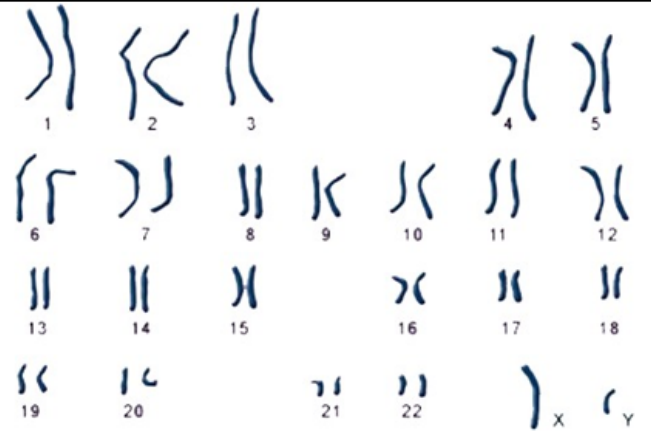
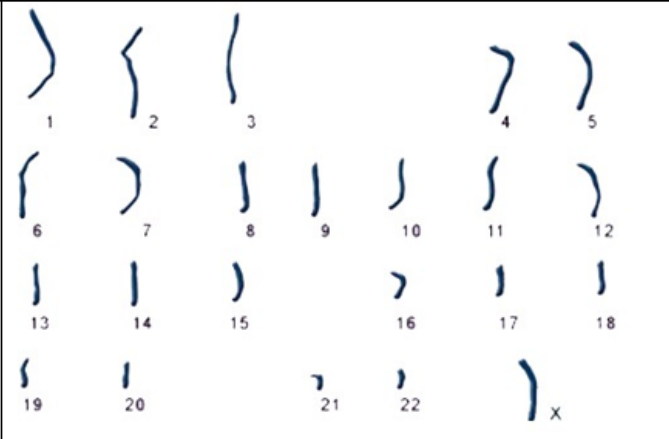
Finalmente, cada cromosoma duplicado va a una célula hija, obteniéndose dos células hijas.



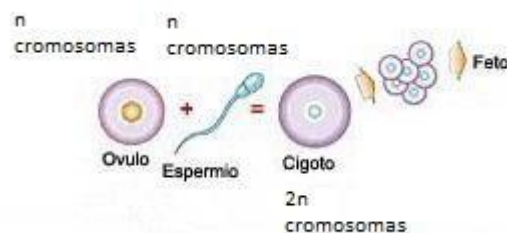
### 3.2.- La meiosis

La meiosis es un proceso básico en la reproducción sexual, que se produce para dar lugar a las células reproductoras o **gametos**. Consiste en dos divisiones celulares consecutivas.

Este proceso se produce en células diploides, pero se originan cuatro células hijas haploides. Una célula haploide es aquella que no tiene pares de cromosomas (en general,  $n$  cromosomas). Las células humanas diploides tienen 23 pares de cromosomas (por tanto, 46 cromosomas), pero las haploides solo tienen 23 cromosomas no emparejados. Las únicas células haploides humanas son los óvulos y los espermatozoides.

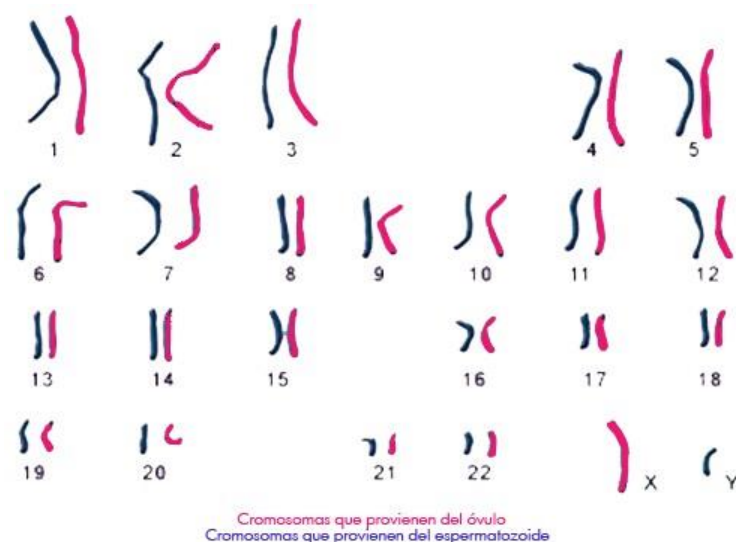
|                                                                                                                                         |                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                         |                      |
| <b>Cromosomas de una célula diploide humana</b><br><b>(23 pares = 46 cromosomas)</b><br>Cualquier célula menos óvulos y espermatozoides | <b>Cromosomas de una célula haploide humana</b><br><b>(23 cromosomas)</b><br>Óvulos y espermatozoides |

El hecho de por qué las células reproductoras tienen sólo 23 cromosomas es sencillo. En el momento de la fecundación, se unen un óvulo (23 cromosomas) y un espermatozoide (23 cromosomas), formándose una nueva célula (cigoto), que es la primera célula del nuevo individuo, que será diploide, pues tendrá 23 pares de cromosomas (se emparejan cromosomas homólogos de óvulo y espermatozoide)..



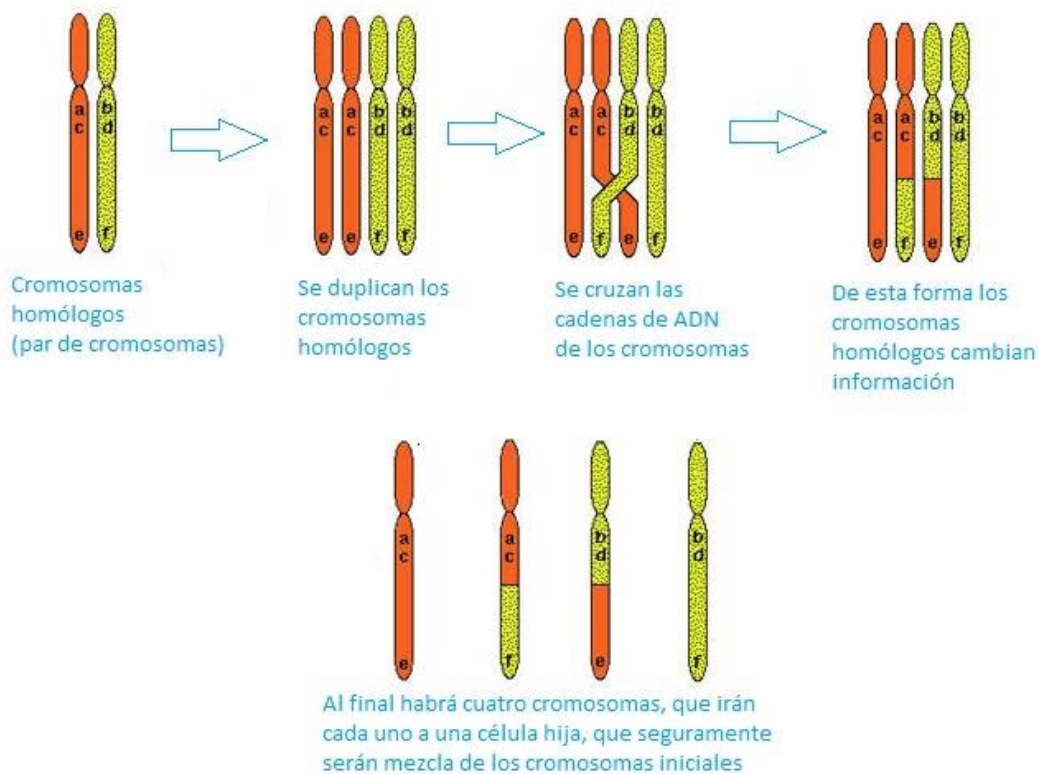
Mediante la meiosis, una célula diploide con “n” pares de cromosomas (2n cromosomas) en su núcleo, dará lugar a cuatro gametos (óvulos o espermatozoides) con la mitad de cromosomas: sólo “n”.

En una célula diploide, los cromosomas de cada par son homólogos (es decir, tienen los mismos genes) pero no exactamente iguales. Uno procede del padre y otro de la madre.



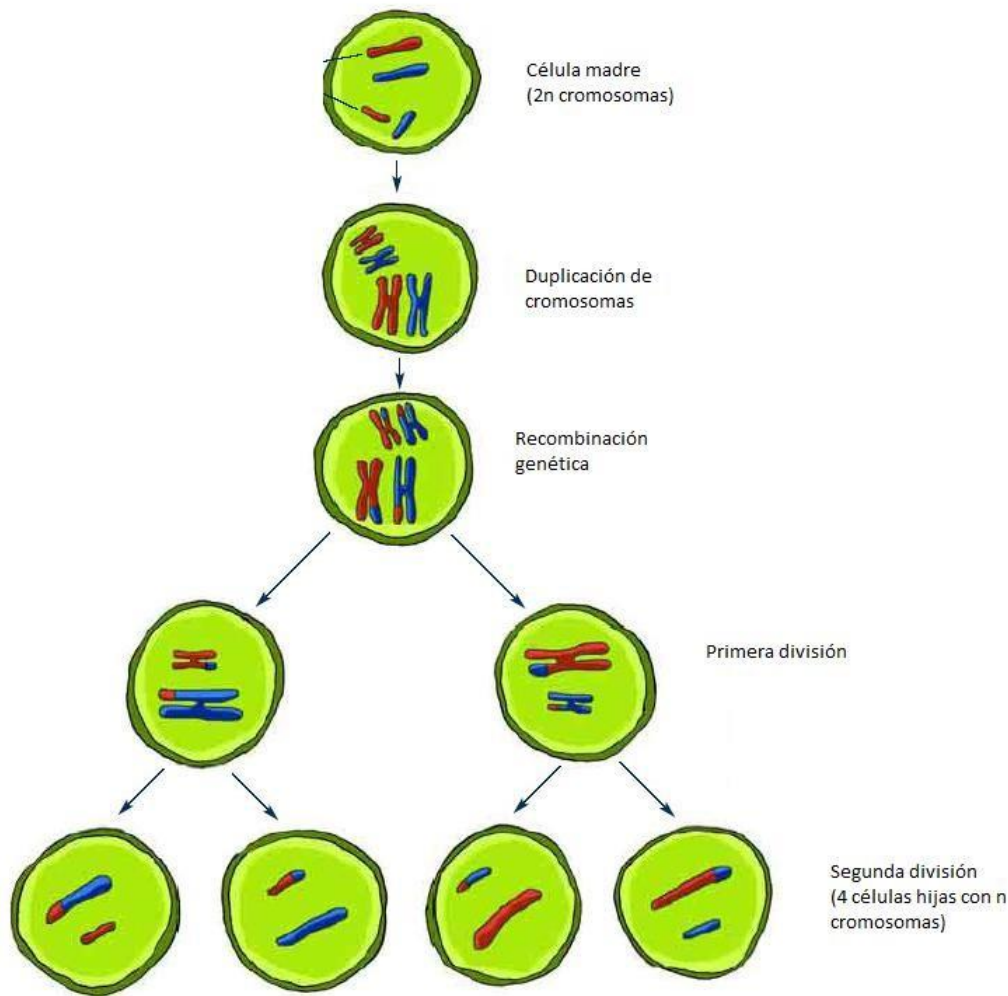
Al inicio de la meiosis se produce, igual que en la mitosis, la duplicación de los 23 pares de cromosomas.

Posteriormente tiene lugar lo que se llama recombinación genética de los cromosomas homólogos ya duplicados, que consiste en que algunos genes del cromosoma procedente del padre pasan al de la madre y viceversa. Este proceso es la clave de la reproducción sexual, ya que permite que los hijos sean diferentes a los padres.



Después de la recombinación, la célula se divide por primera vez y los cromosomas homólogos se separan, quedando cada célula con la mitad de cromosomas ( $n$ ).

A continuación, se produce una segunda división de cada célula, muy parecida a la mitosis (las dos cromátidas de cada cromosoma se separan) con lo que resultarán cuatro células (gametos) con  $n$  cromátidas cada una. Cada cromátida dará lugar al correspondiente cromosoma completo.



## TRANSCRIPCIÓN Y TRADUCCIÓN

**La transcripción** del ADN es el **primer proceso** mediante el cual se transfiere la información contenida en la secuencia del ADN hacia la secuencia de proteína utilizando diversos ARN como intermediarios. Durante la transcripción genética, las secuencias de ADN son copiadas a ARN mediante una enzima. En el caso de las eucariotas, el proceso se realiza en el núcleo.

**La traducción** es el **segundo proceso** de la síntesis proteica (parte del proceso general de la expresión génica). Ocurre en el citoplasma, donde se encuentran los ribosomas. Los ribosomas están formados por una subunidad pequeña y una grande que rodean al ARN. En la traducción, el ARN se decodifica para generar una cadena específica de aminoácidos, llamada polipéptido (el producto de la traducción), de acuerdo con las reglas especificadas por el código genético. Es el proceso que convierte una secuencia de ARN en una cadena de aminoácidos para formar una proteína. Es necesario que la traducción venga precedida de un primer proceso de transcripción.

## 4.- EL ADN Y LA HERENCIA GENÉTICA

### 4.1.- Los cromosomas y el ADN

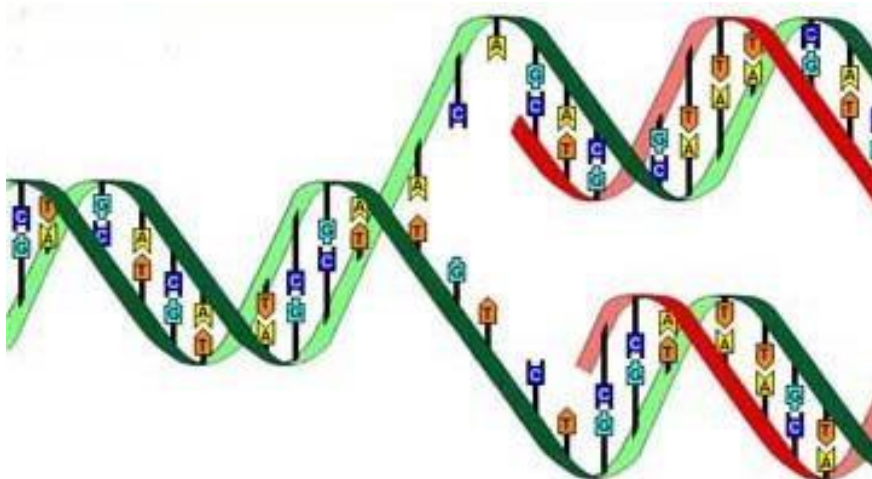
Los **cromosomas** son un componente del núcleo celular que se condensan y aparecen cuando la célula está en división (mitosis o meiosis) y que están compuestos por ADN y proteínas.

### 4.2.- El código genético

Los cromosomas contienen el ADN (ácido desoxirribonucleico), el cual está formado por la unión de pequeñas moléculas que se llaman **nucleótidos**; en el ADN sólo existen cuatro tipos de nucleótidos distintos, diferenciándose solamente en uno de sus componentes, las llamadas bases nitrogenadas:



Estas bases, en la molécula de ADN se encuentran emparejadas: la adenina es capaz de unirse con la timina (A-T) y la guanina siempre se empareja con la citosina (G-C), formando una estructura de dos cadenas enrolladas una sobre la otra, de forma similar a una escalera de caracol. Es lo que se conoce como **estructura de doble hélice**.

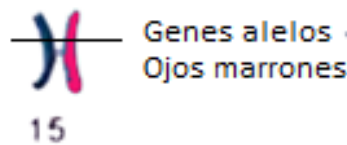


Este esquema representaría un fragmento de ADN, y es la materia que constituye los genes. Un gen no es más que un fragmento de ADN, con información para un carácter determinado, de tal manera que un cromosoma se puede considerar como un conjunto de genes. Cada **gen** determina un carácter del ser vivo. Por ejemplo, hay un gen que determina el color del pelo, otro que determina el color de los ojos y así sucesivamente.

El cromosoma se parece, al microscopio, a una madeja de hilo. Si pudiésemos desenmarañarla veríamos como cada trocito contiene la información de un rasgo hereditario que determina nuestro aspecto. En cada par de cromosomas hay una media de 4.000 genes.



En la mayor parte de las especies, como las de las plantas y animales superiores, cada individuo tiene un conjunto de genes heredados de sus dos progenitores. Para un solo carácter, el individuo tiene dos genes: el que procede del padre y el que ha heredado de su madre. Los dos genes que informan de una misma característica (como el color del pelo) se llaman genes alelos.



## 5.- LAS LEYES DE LA HERENCIA

Todos sabemos que se puede observar un cierto parecido entre una persona y sus familiares más directos (padres, hijos, hermanos). Este parecido entre individuos de la misma familia, la misma raza o de la misma especie no se debe a la casualidad, sino que existen ciertas leyes o pautas que condicionan el desarrollo de los seres vivos; estas pautas están contenidas en el material genético que se transmite de generación en generación y constituye la herencia biológica.



Mucho antes del descubrimiento del ADN, el monje agustino austriaco Gregor **Mendel**, a pesar de que su trabajo fue casi despreciado por la mayor parte de los científicos de su época, descubrió las leyes de la herencia.

### ¿Cómo llego Mendel a obtener sus conclusiones?

Mendel utilizó la planta del guisante.

1. Mendel cortaba los estambres de las flores y las protegía para impedir que se polinizaran de forma natural.

2. Luego, usando un pincel, las polinizaba con el polen que seleccionaba. De esta forma sabía qué plantas intervenían en la formación de las semillas.
3. Sembraba los guisantes y...
4. Cuando crecían se fijaba en los rasgos de las nuevas plantas.

## ¿Qué vio Mendel?

Al principio, se fijó solamente en una característica, el color de la semilla. Aunque los guisantes que conoces, los que se echan en el arroz o los que se cocinan salteados con jamón serrano, son verdes, los hay de color amarillo.

### ✓ Experimento 1:

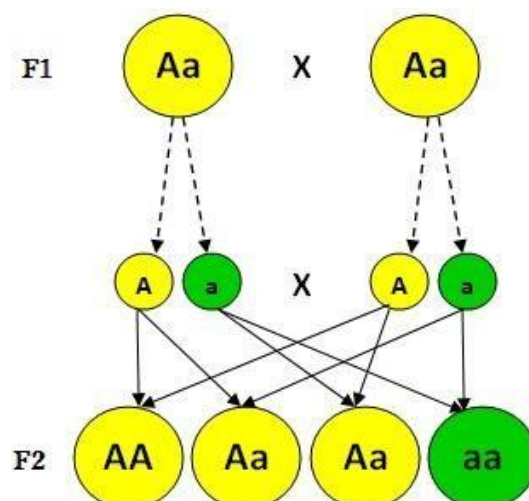
Cruzaba plantas con semillas amarillas y otras de semillas verdes. Es curioso, todas las nuevas plantas producían semillas amarillas.

### ✓ Experimento 2:

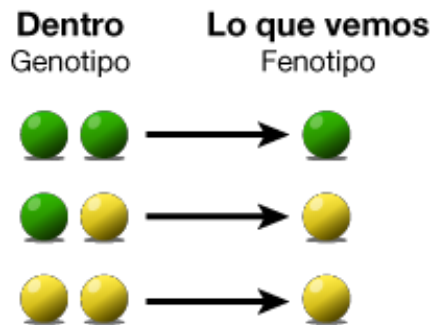
Pero, cuando cruzaba estas plantas hijas aparecían en la siguiente cosecha una pequeña proporción con semillas verdes (un 25 %, aproximadamente). Esto tiene una explicación bastante sencilla. Las semillas contienen información por duplicado del color amarillo y del color verde.

Cada planta transmite a la nueva generación **la mitad** de la información que contiene. Si contiene información del color amarillo y del verde, pasará a sus descendientes una de las dos.

Algunos rasgos no se manifiestan, como el color verde de las semillas, en presencia de información distinta, como el color amarillo. Se dice que el verde (a) es un **rasgo recesivo**, frente al amarillo que se llama **dominante** (A).



Por tanto, para cada característica, los seres vivos tendrán dos genes. Esta combinación de dos genes para una determinada característica, es lo que se denomina **genotipo**. Cuando ambos genes son idénticos, la característica se manifestará tal cual (por ejemplo, si los dos genes de los guisantes tienen información de color amarillo, el guisante será amarillo, y si tienen ambos información de color verde, el guisante será verde). Cuando los genes de un determinado carácter son distintos, se manifestará el dominante (en el caso de los guisantes, si tiene un gen para color amarillo y otro para el verde, será amarillo porque es dominante). La manifestación de una característica en un ser vivo se denomina **fenotipo**.

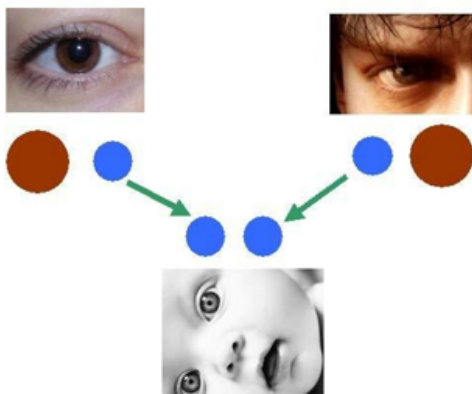


Estas son algunas de las conclusiones que obtuvo Mendel. Hoy en día conocemos mucho mejor los mecanismos por los que se transmite de padres a hijos los caracteres hereditarios.

Por ejemplo el **color oscuro** de cabellos y ojos es un **rasgo dominante**, así que de un padre rubio y una madre morena, lo más “probable” es que el hijo o hija sea moreno.



**EJEMPLO.** Juan y María tienen los ojos oscuros, su bebé, Alejandro, tiene los ojos azules. ¿Cómo ha podido ocurrir esto?:



$A$  = color marrón (gen dominante)  
 $a$  = color azul (gen recesivo)

$AA$  y  $Aa$  tendrán fenotipo marrón  
 $aa$  tendrá fenotipo azul

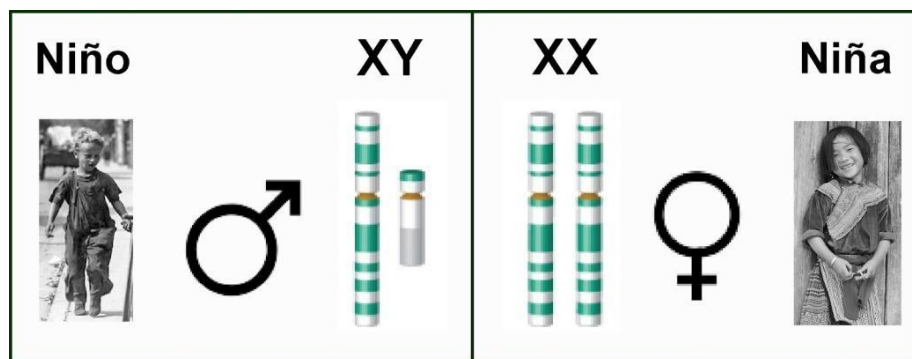
| Genotipo de la madre                                              | Genotipo del Padre |    |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------|----|
|                                                                   | A                  | a  |
| A                                                                 | AA                 | Aa |
| a                                                                 | Aa                 | aa |
| Genotipo de los posibles descendientes<br>(75% con ojos marrones, |                    |    |

*Esto ha podido ocurrir porque tanto Juan como María tenían un antepasado de ojos azules que les dejó en su código genético este “gen recesivo” (está ahí y no se ve), como muestra el gráfico anterior. En realidad esto no es exactamente así; lo hemos simplificado un poco para que te resulte comprensible. En realidad el color de los ojos depende de varios genes y la cosa es algo más complicada.*

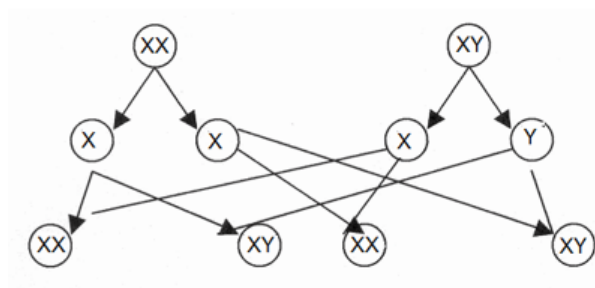
## 5.1.- La herencia del sexo

En los organismos eucariotas existen dos series de cromosomas que pueden agruparse en parejas de homólogos. Estos cromosomas son iguales en su forma y tamaño salvo en el caso de dos de ellos que son diferentes según el sexo del individuo; son los denominados cromosomas sexuales.

En los mamíferos, las **hembras** los tienen iguales, llamándose a su **genotipo XX**, mientras que en los **machos es XY**.



Los caracteres cuyos genes estén en el cromosoma Y no lo pueden presentar más que los varones, que se lo transmitirán a todos sus hijos varones.

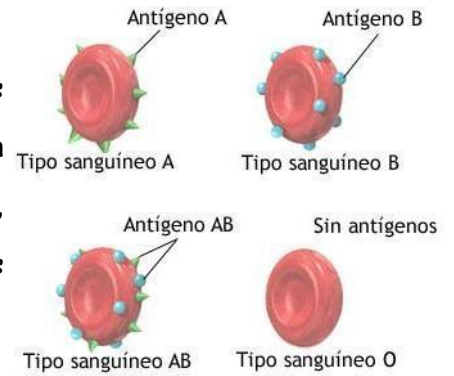


| Genotipo de la madre                                                    | Genotipo del Padre |    |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|
|                                                                         | X                  | Y  |
| X                                                                       | XX                 | XY |
| X                                                                       | XX                 | XY |
| Genotipo de los posibles descendientes<br>(50% varones,<br>50% mujeres) |                    |    |

Lógicamente, la posibilidad de uno u otro sexo en la descendencia es en principio de un 50%

## 5.2.- La herencia del grupo sanguíneo

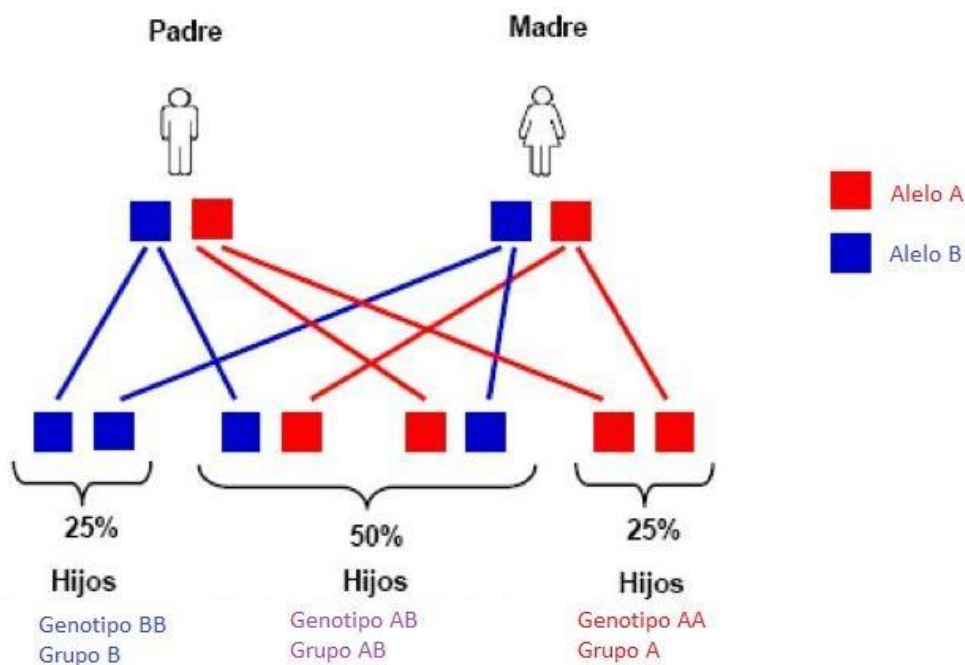
Nuestro grupo sanguíneo se divide en tres grupos en función de los antígenos presentes en la sangre. Cada uno de nosotros hereda de nuestro padre y de nuestra madre un tipo de antígenos que presentan los glóbulos rojos de nuestra sangre (A, B y O), formando una combinación de dos de ellos en nuestro fenotipo. Las combinaciones posibles son:



| ANTÍGENOS (Genotipo) | GRUPO SANGUÍNEO (Fenotipo) |
|----------------------|----------------------------|
| 00                   | 0                          |
| 0A                   | A                          |
| AA                   | A                          |
| 0B                   | B                          |
| BB                   | B                          |
| AB                   | AB                         |

Aunque el genotipo tiene dos tipos de antígenos, el fenotipo, es decir, el grupo sanguíneo, se reduce a cuatro tipos (A, B, O y AB).

Conociendo el grupo sanguíneo de los padres, se puede saber el grupo sanguíneo posible de los hijos, y descartar en algunos casos los que son imposibles.



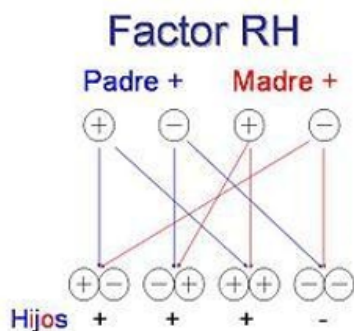
| Grupos Sanguíneos |          | Hijos posibles | Hijos NO posibles |
|-------------------|----------|----------------|-------------------|
| Padre O           | Madre O  | O              | A, B, AB          |
| Padre O           | Madre A  | O, A           | B, AB             |
| Padre O           | Madre B  | O, B           | A, AB             |
| Padre O           | Madre AB | A, B           | O, AB             |

| Grupos Sanguíneos |          | Hijos posibles | Hijos NO posibles |
|-------------------|----------|----------------|-------------------|
| Padre B           | Madre O  | O, B           | A, AB             |
| Padre B           | Madre A  | O, A, B, AB    |                   |
| Padre B           | Madre B  | O, B           | A, AB             |
| Padre B           | Madre AB | A, B, AB       | O                 |

| Grupos Sanguíneos |          | Hijos posibles | Hijos NO posibles |
|-------------------|----------|----------------|-------------------|
| Padre A           | Madre O  | O, A           | B, AB             |
| Padre A           | Madre A  | O, A           | B, AB             |
| Padre A           | Madre B  | O, A, B, AB    |                   |
| Padre A           | Madre AB | A, B, AB       | O                 |

| Grupos Sanguíneos |          | Hijos posibles | Hijos NO posibles |
|-------------------|----------|----------------|-------------------|
| Padre AB          | Madre O  | A, B           | O, AB             |
| Padre AB          | Madre A  | A, B, AB       | O                 |
| Padre AB          | Madre B  | A, B, AB       | O                 |
| Padre AB          | Madre AB | A, B, AB       | O                 |

Además, en la sangre hay que tener en cuenta el factor Rh, una proteína integral de la membrana de los glóbulos rojos. Son Rh positivas aquellas personas que presentan dicha proteína y Rh negativa quienes no presenten la proteína. El factor Rh se hereda del padre y de la madre, siendo el Rh+ dominante sobre el Rh-



+ = gen dominante

- = gen recesivo

++ y +- tendrán fenotipo +

-- tendrá fenotipo -

| Genotipo de la madre                                        | Genotipo del Padre |    |
|-------------------------------------------------------------|--------------------|----|
|                                                             | +                  | -  |
| +                                                           | ++                 | +- |
| -                                                           | +-                 | -- |
| Genotipo de los posibles descendientes<br>(75% Rh positivo, |                    |    |

A partir del grupo y el Rh, se establecen las posibles donaciones de sangre. Un Rh+ solo podrá donar a Rh+, mientras que un Rh- podrá donar a cualquier Rh. Además, el grupo O puede donar a O, A, B y AB, mientras que el AB sólo podrá donar al AB. Esto hace que el grupo O- sea el donante universal y el AB+ el receptor universal.

**Tabla Resumen de Compatibilidades**

|          |     | receptores |    |    |    |     |     |    |    |
|----------|-----|------------|----|----|----|-----|-----|----|----|
|          |     | A+         | A- | B+ | B- | AB+ | AB- | O+ | O- |
| donantes | A+  | ✓          |    |    |    | ✓   |     |    |    |
|          | A-  | ✓          | ✓  |    |    | ✓   | ✓   |    |    |
|          | B+  |            |    | ✓  |    | ✓   |     |    |    |
|          | B-  |            |    | ✓  | ✓  | ✓   | ✓   |    |    |
|          | AB+ |            |    |    |    | ✓   |     |    |    |
|          | AB- |            |    |    |    | ✓   | ✓   |    |    |
|          | O+  | ✓          |    | ✓  |    | ✓   |     | ✓  |    |
|          | O-  | ✓          | ✓  | ✓  | ✓  | ✓   | ✓   | ✓  | ✓  |

| GENOTIPOS Y FENOTIPOS DE LOS GRUPOS SANGUÍNEOS DEL SISTEMA ABO |                               | GENOTIPOS Y FENOTIPOS DE LOS GRUPOS SANGUÍNEOS ABO Y RH |                               |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------|
| GENOTIPO                                                       | FENOTIPO<br>(GRUPO SANGUÍNEO) | GENOTIPO                                                | FENOTIPO<br>(GRUPO SANGUÍNEO) |
| AA                                                             | A                             | AA++                                                    | A+                            |
|                                                                |                               | AA+-                                                    |                               |
|                                                                |                               | AO++                                                    |                               |
|                                                                |                               | AO+-                                                    |                               |
| AO                                                             | A                             | AA--                                                    | A-                            |
|                                                                |                               | AO--                                                    |                               |
| BB                                                             | B                             | BB++                                                    | B+                            |
|                                                                |                               | BB+-                                                    |                               |
|                                                                |                               | BO++                                                    |                               |
|                                                                |                               | BO+-                                                    |                               |
| BO                                                             | B                             | BB--                                                    | B-                            |
|                                                                |                               | BO--                                                    |                               |
| AB                                                             | AB                            | AB++                                                    | AB+                           |
|                                                                |                               | AB+-                                                    |                               |
|                                                                |                               | AB--                                                    |                               |
| OO                                                             | O                             | OO++                                                    | O+                            |
|                                                                |                               | OO+-                                                    |                               |
|                                                                |                               | OO--                                                    |                               |

Tabla resumen de genotipos y fenotipos sanguíneos

## 6.- GENÉTICA Y SOCIEDAD

### 6.1.- La ingeniería genética (cortar y pegar ADN)

La **ingeniería genética** se basa en la manipulación de genes (ADN) para obtener determinadas sustancias específicas aprovechables por los seres humanos: se trata de aislar -cortándolo de una molécula de ADN- el gen que produce la sustancia, e introducirlo en otro ser vivo que sea más sencillo -y barato- de manipular; lo que se consigue es modificar las características hereditarias de un organismo, alterando su material genético.

La ingeniería genética tiene hoy en día múltiples aplicaciones, entre las que podemos citar por su importancia:



la producción industrial de insulina



la fabricación de determinadas vacunas



la obtención de individuos resistentes a determinadas agresiones del ambiente o enfermedades (organismos transgénicos).

## 6.2.- Los alimentos transgénicos

Llamamos alimentos transgénicos a alimentos genéticamente modificados. Mediante la ingeniería genética han podido modificarse las características de gran cantidad de plantas para hacerlas más útiles al hombre, son las llamadas plantas transgénicas. Una de las primeras plantas obtenidas mediante estas técnicas fue un tipo de tomates que tardan en madurar unas semanas después de ser cosechados. También se han conseguido plantas resistentes a productos químicos, insectos o enfermedades. Por ejemplo, ya existen semillas de algodón insensibles a herbicidas y plantas transgénicas que resisten invasiones de virus o que producen toxinas dañinas para algunos insectos.

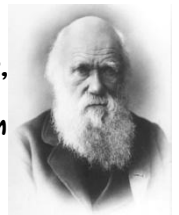
En cuanto al uso de productos transgénicos, hay opiniones para todos los gustos: hay quien piensa que supone un gran avance para la humanidad, pero también hay quienes opinan que, a la larga, terminarán produciéndonos numerosos problemas y enfermedades.

Por ejemplo, el cultivo de maíz modificado genéticamente, solo en España, supera una superficie de cultivo de 140.000 hectáreas, superando el 30% de la producción total de maíz en nuestro país.



## 7.- La evolución de los seres vivos

Hay especies que cambian mucho dependiendo de la edad y sexo y otras que apenas sufren modificaciones, pero los individuos que pertenecen a una misma especie mantienen una característica en común: son capaces de reproducirse entre ellos y tener descendencia fértil.

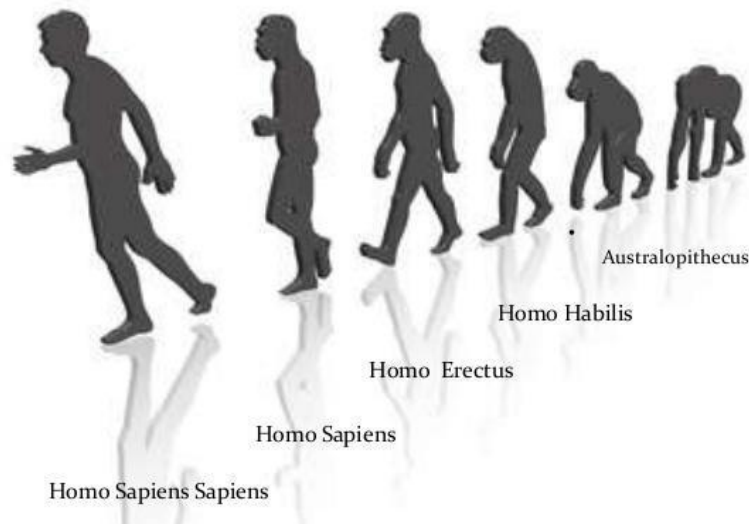


### La evolución vista por Charles Darwin

Darwin enunció su teoría de la evolución con los siguientes postulados:

1. Todas las especies producen una descendencia muy numerosa, mayor de la que puede sobrevivir.
2. Los descendientes, aunque se parecen, son distintos unos de otros.
3. Como el alimento y otros recursos son limitados, tienen que competir por ellos.
4. Solamente sobreviven aquellos individuos más capacitados.

5. Por eso generación tras generación se produce una selección de unos individuos en detrimento de otros menos aptos.
6. Al final, con el paso del tiempo la especie va cambiando.



La forma y el funcionamiento de cada especie están determinados por los genes. Sin embargo, éstos sufren con cierta frecuencia modificaciones que pueden alterar su función, es lo que se llama **mutaciones**.

### **Pero, ¿cómo se producen las mutaciones?**

*Las mutaciones se producen como consecuencia de la exposición a radiaciones y a determinadas sustancias o por los mecanismos de división de las células. En cualquier caso producen cambios que suelen ser muy perjudiciales, aunque algunas veces, muy pocas, aportan una ventaja para el individuo.*

¡¡Fíjate!! Las mutaciones están en los genes, y éstos se transmiten a los descendientes. Luego también ellas se podrán transmitir a los descendientes.

### **¿Cómo eran los habitantes de la tierra?**

Si pudiéramos retroceder en el tiempo y volver 5, 100, 300, 450, 600 y hasta

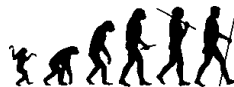
2.000 millones de años atrás el escenario que veríamos se parecería al que se señala en la tabla siguiente.



**El reloj del tiempo** (millones de años atrás)



**El medio ambiente**



**Los seres vivos**

|                     |                                                                            |                                                                                                   |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>0 m. a.</b>      | Se reduce el nivel de hielo en los polos y el clima es más húmedo.         | <b>Primeros homínidos</b><br>Desarrollo de las plantas gramíneas (trigo, avena, ...)              |
| <b>-5 m. a.</b>     | Un gran manto de hielo cubre el hemisferio norte. El clima es frío y seco. | <b>Predominan las aves y los mamíferos.</b> Desarrollo de las plantas con flor y de las gramíneas |
| <b>-100 m. a.</b>   | Solamente hay un continente. El clima es muy seco y cálido.                | <b>En el gran continente hay plantas coníferas y grandes reptiles.</b>                            |
| <b>-300 m. a.</b>   | En los continentes el clima es muy húmedo.                                 | <b>Plantas e insectos terrestres.</b><br>Anfibios (ranas), reptiles y hongos.                     |
| <b>-450 m. a.</b>   |                                                                            | <b>Sólo vida marina:</b> peces, artrópodos, moluscos y Plantas                                    |
| <b>-600 m. a.</b>   | En los continentes no hay seres vivos, ni plantas ni animales.             | <b>Seres marinos:</b> esponjas, medusas, anélidos, artrópodos y algas pluricelulares.             |
| <b>-2.000 m. a.</b> | Atmósfera muy escasa, temperatura muy                                      | Solo viven <b>en el mar seres unicelulares</b>                                                    |

**Bloque 12.**

**• Tema 6 PROBABILIDAD**

**INDICE**

**1.- CONCEPTOS ELEMENTALES EN PROBABILIDAD:**

**2.- PROBABILIDAD CLÁSICA. REGLA DE LAPLACE**

**3.- PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES.**

**3.1.- PROBABILIDAD DE A O B ( $P(A \cup B)$ )**

**3.2.- PROBABILIDAD DE A Y B ( $P(A \cap B)$ )**

**3.3.- PROBABILIDAD CON REPOSICIÓN.**

**3.4.- PROBABILIDAD SIN REPOSICIÓN.**

**4.- DIAGRAMAS DE ÁRBOL.**

## 1.- CONCEPTOS ELEMENTALES:

En la naturaleza podemos distinguir entre dos tipos de sucesos según la certeza o no de que ocurra siempre lo mismo:

- **Experimento Determinístico:**

son aquellos en los que conocidas las condiciones iniciales sabemos seguro lo que va a ocurrir.

Ej: los sucesos físicos que se rigen por las leyes físicas (si tiramos una piedra esta caerá)

- **Experimento Aleatorio:**

cuando aun conociendo las condiciones iniciales no podemos fijar el resultado.

Ej. Ganar la lotería o lanzar un dado.

Los experimentos aleatorios se estudian a partir de la **probabilidad**. La probabilidad de un suceso dado nos indica la posibilidad o no de que ocurra dicho suceso u otro.

El concepto de probabilidad se encuentra con frecuencia en la comunicación entre las personas. Por ejemplo:

1) Juan y Antonia tienen un 60% de probabilidades de casarse.

2) Los alumnos del ISL tienen un 90% de probabilidades de ingresar a la universidad.

En los ejemplos, se da la “medida” de que suceda realmente un evento que es incierto (casarse o ingresar a la universidad), y ésta se expresa mediante un número entre 0 y 1, o en porcentaje.

Intuitivamente podemos observar que cuanto más probable es que ocurra el evento, su probabilidad estará más próxima a “1” o al 100%, y cuando menos probable, más se aproximará a “0”.

De aquí se deduce que un hecho o evento que NO puede ocurrir tendrá probabilidad cero y uno cuya probabilidad es segura tendrá probabilidad uno.

Luego, si A representa un evento o suceso, se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Al lanzar un dado puede ocurrir 6 casos distintos, que salgan 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Cada uno de los casos se llama **suceso elemental**, siendo el **espacio muestral** el conjunto de todos los sucesos. (E)

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Otros sucesos que pueden ocurrir al lanzar un dado es la unión de varios sucesos elementales, por ejemplo:

$$A=\{\text{par}\}=\{2,4,6\}, B=\{\text{múltiplo de 3}\}=\{3, 6\}$$

**Definición:** un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral  $E$ . Se suelen denotar con letras mayúsculas:  $A, B, C, \dots$

Hay dos sucesos importantes:

- El **suceso vacío**, o suceso imposible  $p(\emptyset)=0$
- El propio espacio muestral, o **suceso seguro**  $p(E)=1$

**Espacio muestral ( $E$ )** Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento.

**Ejemplo:** Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Ejemplo:** ¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral si se lanza una moneda y un dado de seis caras?

Usamos el principio multiplicativo:  $2 \cdot 6 = 12$  elementos

En el lanzamiento de monedas, la cantidad de resultados posibles también se determina por el principio multiplicativo:

1 Moneda  $\rightarrow$  2 posibilidades  $E = \{c, s\}$

2 Monedas  $\rightarrow 2 \cdot 2 = 4$  posibilidades  $E = \{(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)\}$ .

3 Monedas  $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  posibilidades  $E = \{(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s), (s,c,c), (s,c,s), (s,s,c), (s,s,s)\}$

$n$  monedas  $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^n$  posibilidades



**Cuando un objeto puede caer de  $a$  maneras distintas y se lanzan  $n$  objetos, el Espacio Muestral tiene  $a^n$  elementos.**

**Ejemplo:** Al lanzar tres dados de seis caras, el Espacio Muestral tiene  $6^3 = 216$  elementos

**Evento o Suceso:** Corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

**Ejemplo:** En el lanzamiento de 2 monedas, el Espacio Muestral es  $E = \{(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)\}$  y tiene 4 elementos.

Un suceso es que salgan dos caras, es decir  $\{(c,c)\}$ , que tiene 1 elemento.

**Ejemplo:** En el lanzamiento de un dado ¿cuántos elementos tiene el Espacio Muestral y cuántos el suceso “que salga un número par”?

Espacio Muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 6 elementos. Suceso = {2, 4, 6}, 3 elementos

**Suceso Elemental:** Es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

$$\text{Suceso} = \{2\} \quad S = \{3\}$$

**Suceso Compuesto:** Es el suceso formado por más de un resultado del espacio muestral.

$$\text{Suceso} = \{\text{salir par}\} = \{2, 4, 6\}$$

**Sucesos Compatibles:** Son los sucesos que comparten resultados de uno o más sucesos comunes.

$$S = \{\text{salir par}\} = \{2, 4, 6\} \quad \text{y} \quad T = \{\text{salir menor que 4}\} = \{1, 2, 3\}$$

**Suceso Incompatible:** Sucesos que no tienen ningún resultado común, es decir, NO SE PUEDEN DAR A LA VEZ.

$$S = \{\text{salir par}\} = \{2, 4, 6\} \quad \text{y} \quad T = \{\text{salir múltiplo de 5}\} = \{1, 5\}$$

**Suceso Imposible:** Su resultado no puede ocurrir nunca. Se dice conjunto vacío.  $\Phi$

$$S = \{\text{salir un 7 en un dado}\}$$

**Suceso Seguro:** Su resultado ocurre SIEMPRE. Coincide con el espacio muestral de una experiencia aleatoria.

$$S = \{\text{salir un número menor o igual a 6}\}$$

**Suceso Contrario:**  $\bar{A}$  o  $A'$  Es aquel que se verifica cuando no ocurre el suceso A.

$$A = \{\text{salir cara}\} \quad \bar{A} = \{\text{salir cruz}\}$$

**Unión de Sucesos:**  $A \cup B$  es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$$

**Ejemplo:** lanzamos un dado tal que dos sucesos:  $A = \{\text{impar}\} = \{1, 3, 5\}$   $B = \{\text{primo}\} = \{2, 3, 5\}$   $\rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

**Intersección de Sucesos:**  $A \cap B$  es el suceso formado por los elementos que están simultáneamente en A y en B.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$$

*Ejemplo:* lanzamos un dado tal que dos sucesos:

$$- \quad A = \{\text{par}\} = \{2, 4, 6\} \quad B = \{\text{primo}\} = \{2, 3, 5\} \rightarrow A \cap B = \{2\}$$

### EJERCICIO 1:

Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

- ¿cuál es el espacio muestral?
- $A = \text{"obtener número primo"}$ ,  $B = \text{"múltiplo de 3"}$ . Escribe los sucesos, A, B,  $A'$ ,  $B'$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cup A'$  y  $A \cap A'$

*Solución:*

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ;  $B = \{3, 6, 9\}$ ;  $A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ,  $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ ,  $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $A \cap B = \{3\}$ ,  $A \cup A' = E$ ,  
 $A \cap A' = \emptyset$

### EJERCICIO 2:

Lanzamos dos veces una moneda:

- Escribe todos los sucesos elementales
- Escribir el suceso  $S = \{\text{la primera sale cara}\}$
- Escribir suceso incompatible con S

*Solución:*

- Podemos entender el experimento de dos formas:
  - Ver el número de caras  $E = \{0 \text{ caras}, 1 \text{ cara}, 2 \text{ caras}\}$ . No son equiprobables
  - Distintas situaciones (importa el orden).  $E = \{cc, cx, xc, xx\}$ . Son equiprobables: un espacio muestral es equiprobable si todos los elementos que lo conforman tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, tienen la misma probabilidad de ocurrencia.
- $S = \{cx, cc\}$
- $A = \{\text{salen dos caras}\} = \{cc\}$

## Cómo se mide la PROBABILIDAD de un SUCESO:

- Si el suceso pertenece a una **experiencia regular**, como en el caso de una moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará asignando la misma probabilidad a todos los casos.

Por ejemplo, para asignar probabilidades a cada cara de un dado correcto, tenemos en cuenta que son 6 casos, todos con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de cada cara es  $1/6$ .

- Si la **experiencia** es **irregular**, a priori desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es experimentar.

Por ejemplo, si un cierto jugador de baloncesto ha encestado 187 tiros libres y ha fallado 85 (su número de intentos ha sido  $187 + 85 = 272$ ), razonamos así:

$\text{fr} [\text{acierto}] = 187/272 = 0,6875$ . Por tanto,  $P [\text{acierto}] \approx 0,6875$ .  $\text{fr} [\text{fallo}] = 85/272 = 0,3125$ .

Por tanto,  $P [\text{fallo}] \approx 0,3125$ .

Al repetir muchas veces,  $N$ , una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso,  $S$ , toma valores muy parecidos a su probabilidad:  $\text{fr} (S) \approx P [S]$

## 2.- PROBABILIDAD CLÁSICA:

### REGLA DE LAPLACE

PARA  
EXPERIENCIAS  
REGULARES  
SIMPLES:



$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$



### Ejemplo 1:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado común salga un número primo?

**Solución:** El Espacio Muestral  $E$ , está dado por:  $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , por lo tanto posee 6 elementos, es decir, 6 casos posibles.

Sea  $A$ , el evento o suceso:  $A$ : que salga un número primo, entonces se tiene que:  $A=\{2, 3, 5\}$ , por lo tanto posee 3 elementos, es decir, 3 casos favorables.

Por lo tanto: **Casos posibles:** 6 (1, 2, 3, 4, 5 y 6) **Casos favorables** (números primos): 3 (2, 3, y 5)

Entonces: 
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Ejemplo 2:

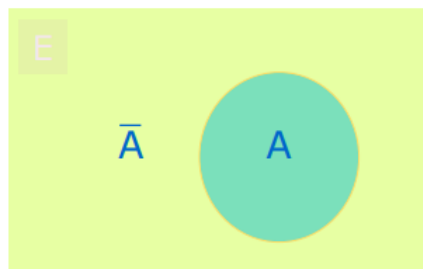
Al lanzar 2 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean caras?

Casos posibles: 4    Casos favorables (2 caras): 1    Entonces:  $P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$

### 2.1.- Probabilidad de un suceso contrario:

La probabilidad de que un suceso NO ocurra, o “probabilidad de un suceso contrario”, se obtiene a través de:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



### Ejemplo:

Si La probabilidad de que llueva es  $2/5$ , ¿cuál es la probabilidad de que NO llueva?

*Solución:*

$$P(\text{no llueva}) = 1 - P(\text{llueva}) \quad P(\text{no llueva}) = 1 - 2/5 \quad P(\text{no llueva}) = 3/5$$

### 3.2 Probabilidad de un suceso seguro:

Si se tiene certeza absoluta de que un evento A ocurrirá:  $P(A) = 1$

### Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número natural al lanzar un dado común es 1 (6 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)    Casos favorables: 6 (1,2,3,4,5,6)

$$P(\text{natural}) = 6/6 = 1$$

### 3.3 Probabilidad de un suceso imposible:

Si se tiene certeza absoluta de que un evento A NO ocurrirá:  $P(A) = 0$

### Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 0

$$P(\text{mayor que } 6) = 0/6 = 0$$

### 3.- PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1.- La probabilidad de que ocurra el suceso A ó el suceso B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Caso 1:** Cuando A y B son eventos mutuamente excluyentes (es decir, **incompatibles**) como  $P(A \cap B) = 0$  entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Ejemplo:**

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 2 ó mayor que 5?

*Solución:*  $P(<2) = \frac{1}{6}$  y  $P(>5) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} P(<2) \text{ ó } P(>5) &= P(<2) \cup P(>5) \\ &= P(<2) + P(>5) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Caso 2:** De ser **compatibles** o lo que es lo mismo, de no ser mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Ejemplo:**

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

*Solución:*

Casos posibles 6 {1,2,3,4,5,6} Casos favorables (menor que 5): 4 {1,2,3,4}

$$P(\text{menor que } 5) = 4/6$$

Casos favorables (número par): 3 {2,4,6}

$$P(\text{número par}) = 3/6$$

Como 2 y 4 son menores que 5, y al mismo tiempo son pares, se estarían considerando como casos favorables dos veces.

Por lo tanto, la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par, al lanzar un dado se expresa como:

$$P(<5) \cup P(\text{par}) = P(<5) \cup P(\text{par}) - P(<5 \cap \text{par}) = P(<5) + P(\text{par}) - P(<5 \cap \text{par}) = 4/6 + 3/6 - 2/6 = 5/6$$

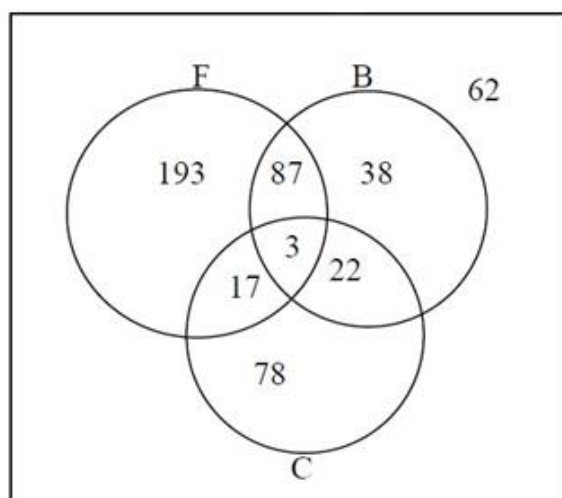
Muchas veces cuando hay más de dos sucesos para calcular las probabilidades lo mejor es hacer un dibujo donde se muestren los distintos conjuntos, las intersecciones, etc. usando los diagramas de Venn

### Ejemplo:

En el instituto de 500 personas se cumple que el número de alumnos que juega al fútbol son 300, que juegan al baloncesto 150, que hacen ciclismo 120, que juegan fútbol y baloncesto son 90, al fútbol y ciclismo 20, baloncesto y ciclismo 25, y por fin que practican los tres deportes 3. Calcular:

- La probabilidad de que elegido al azar un alumno no haga ningún deporte
- La probabilidad de que elegido al azar un alumno no juegue al baloncesto
- La probabilidad de que elegido al azar un alumno juegue al baloncesto o al fútbol
- La probabilidad de que elegido al azar un alumno practiquen algún deporte

### Solución:



### Solución

$F = \{\text{fútbol}\}$ ,  $B = \{\text{baloncesto}\}$ ,  $C = \{\text{ciclismo}\}$

$$a) S = \{\text{ningún deporte}\} = F' \cap B' \cap C' \rightarrow p(F' \cap B' \cap C') = \frac{62}{500}$$

$$b) B' = \{\text{no juegue al baloncesto}\} \rightarrow p(B') = 1 - p(B) = 1 - \frac{150}{500}$$

$$c) B \cup F = \{\text{baloncesto o fútbol}\} \rightarrow p(B \cup F) = p(B) + p(F) - p(B \cap F) = \frac{150}{500} + \frac{300}{500} - \frac{90}{500} = \frac{360}{500}$$

$$d) F \cup B \cup C = \{\text{algún deporte}\} \rightarrow p(F \cup B \cup C) = 1 - p(\text{ningún deporte}) = 1 - \frac{62}{500} = \frac{438}{500}$$

### 3.2.- La probabilidad de que ocurra el suceso A y el suceso B

**Caso 1:** Cuando A y B son eventos **independientes**: (si la probabilidad de que ocurra el proceso B no depende de que haya ocurrido o no antes A.), se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Ejemplo:**

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado se obtengan dos números pares?

*Solución:*

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 3 (2,4,6) Entonces:

$$P(\text{dos pares}) = P(\text{par}) \cdot P(\text{par}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

**Caso 2:** Cuando A y B son eventos **dependientes** corresponde a la **Probabilidad Condicionada**: sea un experimento aleatorio en el que hay dos sucesos A y B. Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A, y se denota como  $p(B/A)$  a la probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que es también A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Ejemplo:**

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 sabiendo que ha salido par?

*Solución:*

**B:** Sacar 4

**A:** Número par = { 2,4,6 }

$$P(B/A) = \frac{1}{3}$$

### 3.3.- Probabilidad con reposición.

La probabilidad de que ocurran A y B, es decir la intersección de ambas, es igual al producto de las dos probabilidades:

$$P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \text{ en sucesos independientes}$$

**Ejemplo:**

Extraemos una carta y miramos el palo, y la volvemos a introducir. Extraemos otra carta y volvemos a mirar el palo.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean de oros?.
- ¿y la primera de oros y la segunda de copas?

Está claro que son sucesos independientes, ya que al volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción no depende del palo de la primera.

#### Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

*Solución:*

**Primera extracción**

**Segunda extracción (Con reposición)**

Casos posibles: **30**

Casos posibles: **30**

Casos favorables: **12**

Casos favorables: **12**

Entonces:

$$P(\text{dos blancas}) = P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) = P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) = \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} = \frac{144}{900} = \frac{4}{25}$$

### 3.4.- Probabilidad sin reposición.

La probabilidad de que ocurra A y B, es decir la intersección, es igual al producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo tal que antes haya ocurrido el primero (**probabilidad condicionada**).

$$P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \text{ en sucesos dependientes}$$

#### Ejemplo:

Extraemos una carta y después otra sin reemplazar la primera.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean de oros?
- ¿y la primera de oros y la segunda de copas?

Está claro que son sucesos dependientes, ya que al no volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción depende del palo de la primera.

#### Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

*Solución:*

**Primera extracción**

**Segunda extracción (Sin reposición)**

Casos posibles: **30**

Casos posibles: **29**

Casos favorables: **12**

Casos favorables: **11**

Entonces:

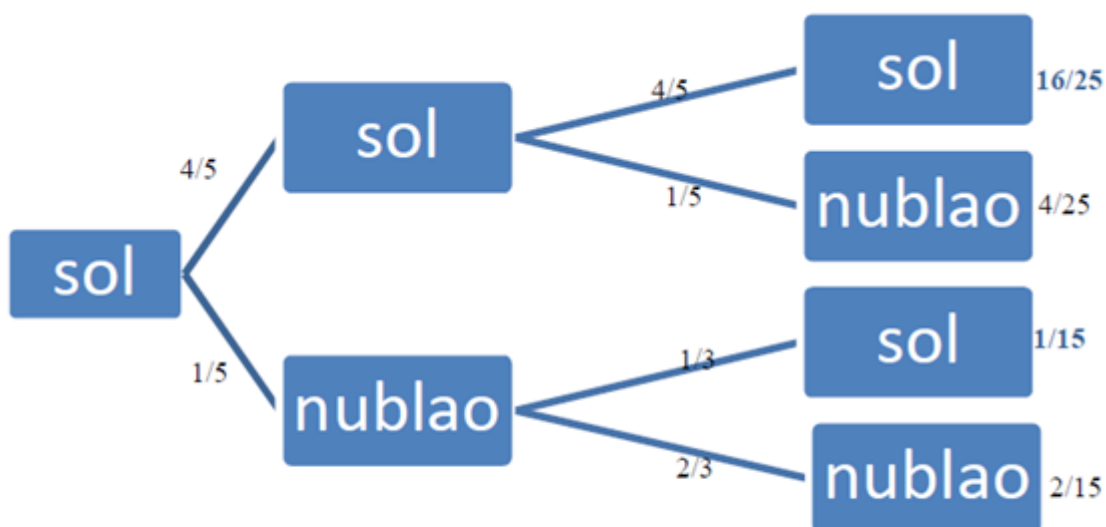
$$P(\text{dos blancas}) = P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) = P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{132}{870} = \frac{22}{145}$$

## 4.- DIAGRAMA DE ÁRBOL

- Las experiencias se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol**.
- Se utiliza para calcular la probabilidad cuando para llegar a un suceso dado se llega a partir de distintos pasos o niveles y puede ocurrir por diferentes caminos.
- Se utiliza tanto cuando los sucesos son independientes como dependientes.
- La probabilidad será igual a la suma de las probabilidades de los diferentes caminos.

### EJEMPLO:

Se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es de  $4/5$ . Pero si está nublado, la probabilidad de que lo siga estando es de  $2/3$ . Si hoy es viernes y hace sol, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo haga sol?



$$p(\text{sol domingo}) = 16/25 + 1/15 = 0,71$$

*Bloque 12.*

• **Tema 7 MOVIMIENTOS Y FUERZAS**

**INDICE**

**1.- CONCEPTO DE FUERZA**

**2.- COMPOSICIÓN DE FUERZAS**

**3.- DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS**

**4.- DINÁMICA. LEYES DE LA DINÁMICA.**

**5.- FUERZA DE ROZAMIENTO, PESO Y NORMAL**

**6.- PLANOS HORIZONTALES**

**7.- DEFORMACIONES INELÁSTICAS. CINEMÁTICA**

**7.1.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO**

**7.1.1.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME**

**7.1.2.- MOV. RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO**

**7.2.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.**

**8.- LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL**

## INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a tratar dos temas fundamentales en física, la dinámica y la cinemática y como se aplican estos conceptos en la vida real con un enfoque tecnológico.

Comprender lo que es una fuerza significa saber por qué se mueven las cosas, aunque las fuerzas también pueden hacer otras cosas. Sus efectos cubren todo un abanico de intensidades porque tanto un terremoto como un parpadeo son consecuencia de fuerzas. En cada una de estas dos situaciones también podemos detectar movimiento.

Las fuerzas cumplen tres leyes desde las que se pueden explicar todas sus actuaciones. Intuitivamente ya las habrás experimentado, porque las fuerzas nos rodean. Todos estos conceptos se recogen con el nombre de **dinámica**.

En cuanto al movimiento, es tanta la abundancia de este fenómeno que se justifica la existencia de una parte de la física dedicada exclusivamente a su descripción. Esta parte se llama **cinemática**.

## 1. CONCEPTO DE FUERZA

La fuerza puede definirse como toda acción o influencia capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo.

Las fuerzas pueden ser **interiores** o **exteriores**:

- **Fuerzas interiores.** Son aquellas que se ejercen entre partes de un mismo cuerpo o sistema.

**Ejemplo.** La fuerza que hace que un muelle recupere su forma después de estirarlo.

- **Fuerzas exteriores.** Son aquellas que se ejercen entre cuerpos o sistemas diferentes.

**Ejemplo.** La fuerza que una persona hace al empujar un libro sobre una mesa.

Las fuerzas que se producen entre los cuerpos pueden actuar a distancia o por contacto entre ellos.

**Ejemplos:**

- a. Fuerzas a distancia son la atracción gravitatoria de los cuerpos en el Universo, atracción repulsión entre cargas o entre imanes...
- b. Fuerzas por contacto es la fuerza que hace un caballo tirando de un carro, una cuerda sujetando un objeto, la fuerza con que el suelo responde a un cuerpo apoyado en él,...

La fuerza es una **magnitud vectorial** capaz de deformar los cuerpos (efecto estático), modificar su velocidad o vencer su inercia y ponerlos en movimiento si estaban inmóviles (efecto dinámico).

Las fuerzas se representan mediante un vector. Para definir un vector, y por lo tanto una fuerza, no solo debemos conocer su valor, sino también otras características, que son:

- **Módulo:** es el valor numérico de la fuerza, la cuantía de la fuerza. La unidad en que se miden las fuerzas es el Newton (N)
- **Dirección:** es la recta que incluye a la fuerza.
- **Sentido:** es la orientación que toma el vector (fuerza) dentro de su dirección. Todas las direcciones tienen dos sentidos.
- **Punto de aplicación:** es el punto donde se ejerce la fuerza.

**Actividad 1**

En unas rebajas, dos personas intentan arrebatarse mutuamente un jersey que ambas sujetan, ¿Cuál de las dos logrará su objetivo?

- a) La que tenga más edad.
- b) La que tenga peor carácter.
- c) La que tire con más fuerza.

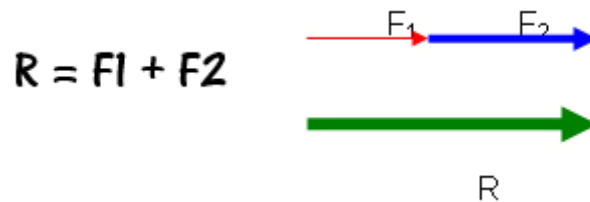
## **2.- COMPOSICIÓN DE FUERZAS**

Componer varias fuerzas consiste en calcular una fuerza única (**resultante**) que haga el mismo efecto que todas ellas juntas.

Casos:

**1.- Fuerzas de la misma dirección y sentido.**

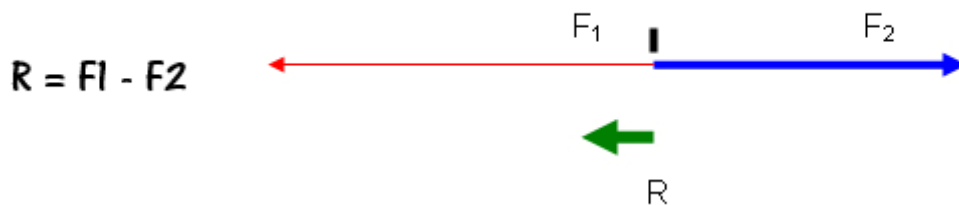
La resultante es otra fuerza de la misma dirección y sentido, y de módulo, la suma de los módulos .



**Ejemplo:**  $F_1 = 3 \text{ N}$   $F_2 = 4 \text{ N}$   $R = 3 + 4 = 7 \text{ N}$

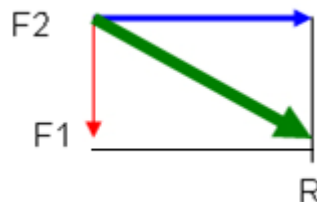
**2.- Fuerzas de la misma dirección y sentido contrario:**

La resultante es otra fuerza de la misma dirección, sentido el de la mayor, y de módulo, la diferencia de los módulos.



**Ejemplo:**  $F_1 = 3 \text{ N}$   $F_2 = 4 \text{ N}$   $R = 4 - 3 = 1 \text{ N}$

**3.- Fuerzas de distinta dirección y distinto sentido (Fuerzas concurrentes):**



Para calcular gráficamente la resultante, se emplea la regla del paralelogramo:

Para realizar el cálculo numérico se emplea el Teorema de Pitágoras o trigonometría según convenga con los datos que se tenga.

**Ejemplo:**  $F_1 = 3 \text{ N}$   $F_2 = 4 \text{ N}$   $R = \sqrt{3^2 + 4^2}$ ;  $R = \sqrt{9 + 16}$ ;  $R = \sqrt{25} = 5 \text{ N}$

**Actividad 2**

1. Dos fuerzas iguales de 1 N cada una se aplican sobre un objeto de modo que forman entre

sí un ángulo de  $90^\circ$ . Calcula el módulo de la resultante y dibuja las tres fuerzas sobre unos ejes de coordenadas.

2. Calcula el valor de la dirección de la resultante en el siguiente sistema de fuerzas:

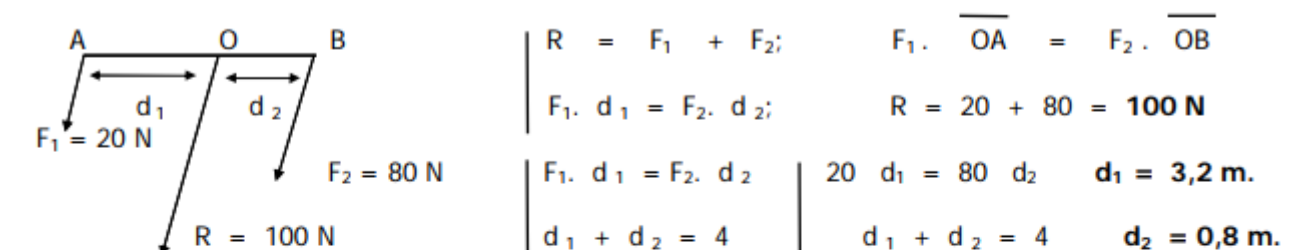
3. Dibujar dos fuerzas de módulo 3N y 4N respectivamente y cuya resultante sea:



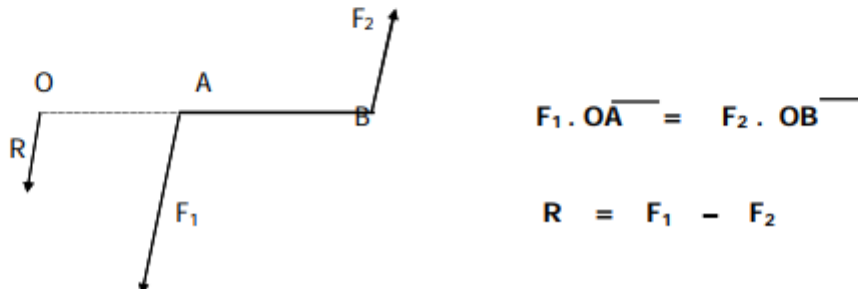
### Actividad 3

Calcula la resultante y la posición del punto de aplicación de la resultante de dos fuerzas paralelas si tienen el mismo sentido y cuyos valores son de 20 N y 80 N. La distancia entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas es de 4 m.

**Solución:**



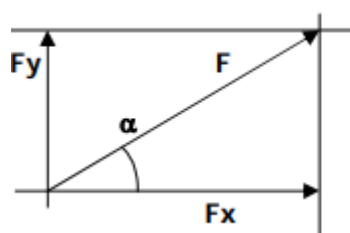
- Si tienen sentidos opuestos, la resultante es una fuerza paralela a ellas, de sentido el de la mayor y cuyo módulo es igual a la diferencia de los módulos. Su punto de aplicación es exterior a ambas y cumple:



## 3.- DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS

Descomponer una fuerza en otras varias es hallar un sistema de fuerzas que produzcan el mismo efecto que la fuerza dada.

Un caso muy interesante es la descomposición de una fuerza en dos componentes que sean perpendiculares entre sí.



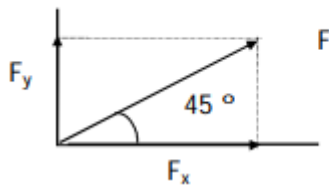
$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \cos \alpha$$

#### Actividad 4

Halla las componentes en el eje y y en el eje x de la  $F=20\text{N}$  de la figura.

$$\text{sen } 45 = 0,7 \quad ; \quad \text{cos } 45 = 0,7$$



**Solución:**

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 45 = 20 \cdot 0,7 = 14 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \text{sen } \alpha = 20 \cdot \text{sen } 45 = 20 \cdot 0,7 = 14 \text{ N}$$

### 4.- DINÁMICA

Como ya hemos mencionado, una fuerza puede hacer que un objeto modifique su forma, su velocidad, venza su inercia (inercia es la tendencia que tienen los cuerpos a conservar su estado de movimiento) o se ponga en movimiento si estaba inmóvil.

La **dinámica** es la parte de la Física que estudia las causas que producen el movimiento o la deformación de los cuerpos, es decir, las fuerzas.

Existen dos tipos de deformaciones según sea la interacción entre los cuerpos:

- **Elástica:** Es aquella, que una vez de dejar de ejercer la fuerza sobre el cuerpo, este vuelve a recuperar su posición inicial.

**Ejemplo:** Cuando empujamos una puerta que está sujeta con un muelle, esta vuelve a su posición inicial al dejar de ejercer la fuerza. Cuando estiramos una goma de, esta al cesar es esfuerzo recupera su longitud inicial.

- **Inelástica:** es aquella, que una vez de dejar de ejercer la fuerza sobre el cuerpo, este no vuelve a recuperar su posición inicial.

**Ejemplo:** cuando una niña empuja un cochecito, este se desplaza cambiando su velocidad y situación.

Cuando aplastamos la nieve.

#### 4.1.- Leyes de la dinámica

Isaac Newton (1.643-1.727), científico y matemático inglés, promulgo las denominadas “**Leyes de la Dinámica**”, en las cuales expuso los principios sobre los que se basa el estudio de las fuerzas.

### ➤ PRIMERA LEY O LEY DE INERCIA:

**“Sí sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero, el cuerpo estará en reposo o se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme”**

#### Conclusiones:

1. Todo cuerpo libre (no sometido a interacciones) estará en reposo o se moverá con velocidad constante en trayectoria recta.
2. Si un cuerpo está sometido a una aceleración, sobre él estará actuando alguna fuerza resultante.
3. Todo cuerpo en reposo seguirá en reposo mientras no se le aplique una fuerza.
4. La tendencia de los cuerpos a conservar su estado de reposo o de movimiento se llama inercia. La inercia es la propiedad de un cuerpo que mide la resistencia del mismo a variar su estado de reposo o de movimiento. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, mayor será su inercia.

### ➤ SEGUNDA LEY:

**“Existe una relación constante entre las fuerzas aplicadas a un cuerpo y las aceleraciones que se producen en el mismo, siendo la constante de proporcionalidad la masa del cuerpo.”**

Matemáticamente se expresa:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

**Es decir, la fuerza resultante (suma vectorial de todas las fuerzas) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración.**

La fórmula escrita se conoce como ecuación fundamental de la dinámica.

#### Consecuencias de la segunda ley de Newton:

- Una consecuencia de esta ley son las unidades de fuerza. En el S. I. es el **Newton**

$$1 \text{ Newton} = 1\text{N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

Se define el Newton como la fuerza que aplicada a 1 kg de masa le produce una aceleración de 1 m/s<sup>2</sup>.

- Otra unidad de fuerza es el kilopondio (kp) Kilopondio es la fuerza con que la Tierra atrae a 1 kg de masa al nivel del mar y a 45° de latitud.

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 9,8 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ N};$$

$$1 \text{ kp} = 9,8 \text{ N}$$

- Otra consecuencia de esta ley es el peso de un cuerpo. Como el peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae:

$$P = m \cdot g$$

### ➤ TERCERA LEY o LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN:

“ Si un cuerpo actúa sobre otro con una fuerza (acción), éste reacciona contra el primero con una fuerza igual y de sentido contrario (reacción) ”.

*Estas dos fuerzas no se anulan porque actúan sobre cuerpos diferentes.*

**Ejemplo.** Cuando una persona intenta saltar a tierra desde una barca, la persona empuja la barca hacia atrás (acción) para que la barca le empuje hacia adelante (reacción).

### Actividad 5

Sobre un cuerpo que pesa 20 N y que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal se aplican dos fuerzas paralelas a la superficie de sentido contrario y de valores 8 N y 14 N Calcular:

- a) La fuerza resultante.      b) La aceleración.

**Solución:**

Aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica:



$$F = m \cdot a$$

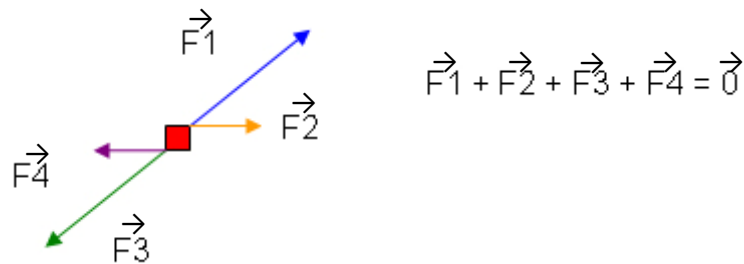
La fuerza resultante vale:  $F = 14 - 8 = 6 \text{ N}$

$$P = m \cdot g ; 20 = m \cdot 10 ; m = 20 / 10 = 2 \text{ kg}.$$

$$6 = 2 \cdot a ; a = 6 / 2 = 3 \text{ m/s}^2.$$

#### 4.2.- Deformaciones elásticas. Equilibrio de fuerzas

Se dice que un cuerpo está en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.



En los siguientes ejemplos resueltos podrás comprender fácilmente los principios de la dinámica o leyes de Newton.

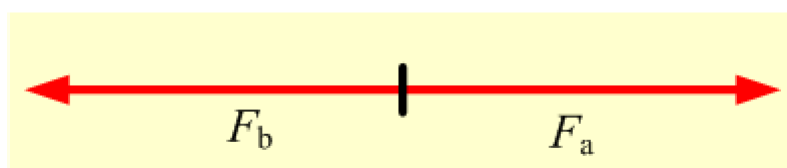
Cuando un sistema está en equilibrio pueden darse dos casos:

- Que el objeto sobre el que actúan las fuerzas esté en reposo y se llama “**equilibrio estático**”.
- Que el objeto sobre el que actúan las fuerzas esté siguiendo una trayectoria recta con velocidad constante y entonces se llama “**equilibrio dinámico**”.

#### Ejemplos Resueltos

##### Ejemplo 1.

¿Hay alguna manera de aplicar las fuerzas de modo que la resultante sea nula? si tu respuesta es afirmativa, indica cómo.



Sí.

El módulo de la fuerza resultante de dos fuerzas de idéntica dirección pero de sentidos opuesto es igual a la diferencia de los módulos o valores físicos de las dos fuerzas.

Si las dos fuerzas son iguales y se aplican en igual dirección pero en sentido opuesto, la diferencia de sus módulos será cero, pues ambos son iguales. Decimos que el cuerpo está en equilibrio.

##### Ejemplo 2.

¿Podría moverse un cuerpo si la resultante de las fuerzas que actúan sobre él son nulas? En caso afirmativo, indica a que movimiento hace referencia ¿Qué ley se aplica?

Si el cuerpo se encuentra en movimiento y sobre él no actúa ninguna fuerza o la resultante es cero, mantendrá su movimiento de forma uniforme. Si se encuentra en reposo, permanecerá en el mismo estado.

La ley de inercia, o el primer principio de Newton, no solamente es válida cuando no se ejerce ninguna fuerza sobre un cuerpo, sino que también es efectiva cuando la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo es cero. En general podemos afirmar que si sobre un cuerpo cualquiera no se aplica ninguna fuerza: si el cuerpo está en reposo, permanece en este estado y si está en movimiento, también mantiene este de manera uniforme indefinidamente.

### Ejemplo 3.

Sobre un cuerpo están actuando dos fuerzas, una de 15N en la dirección horizontal y sentido hacia la derecha y la otra, de 9N en la dirección horizontal y hacia la izquierda. ¿Qué fuerza, dirección y sentido debemos aplicarle para que el cuerpo quede en equilibrio?



Equilibrio.

Resultante = 6N

Fuerza resultante =  $15 - 9 = 6\text{ N}$  (color rojo) hacia la derecha en la dirección horizontal.

Necesitaremos una fuerza igual y sentido opuesto que nos anule la resultante calculada y deje el cuerpo en equilibrio. La fuerza necesaria será de 6 N en la dirección horizontal y hacia la izquierda (color verde).

En los siguientes ejemplos resueltos podrás comprender fácilmente los principios de la dinámica o leyes de Newton.

### Ejemplo 4.

Sobre un cuerpo de 15 Kg de masa actúa una fuerza de 7N, ¿cuál es la aceleración producida?

Acudiendo a la fórmula  $F = m \cdot a$  y despejando de ella la aceleración queda:  $\frac{F}{m} = a$

por lo tanto aplicándolo a este problema tendremos.

$$a = \frac{7}{15} = 0,46 \text{ m/s}^2$$

### Ejemplo 5.

Una fuerza de 120 N produce una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ . Calcula la masa del cuerpo sobre el que ha actuado la fuerza.

Volviendo a aplicar la formula  $F = m \cdot a$  y despejando en el caso de la masa  $m = \frac{F}{a}$

$$m = \frac{120}{2} = 60Kg$$

#### Ejemplo 6.

Sobre un cuerpo de 100 gramos de masa se ejerce una fuerza de 0,5 N. Calcula su aceleración.

Puesto que tenemos que trabajar con unidades del Sistema Internacional, antes de iniciar ninguna operación deberemos transformar los, gramos en kilogramos, es decir.

$$100 \text{ gramos} = 0.1 \text{ Kg}$$

Después usando la fórmula del segundo principio de Newton, y despejando la aceleración

$$a = \frac{F}{m} ; a = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ m/s}^2$$

#### Ejemplo 7.

Si sobre un cuerpo de 20 kilos de masa la tierra ejerce una fuerza de 196 N, ésta misma fuerza será la que ejerce el cuerpo sobre la Tierra según el principio de acción y reacción. Si la masa de la Tierra es de  $5,97 \cdot 10^{24}$  Kg ¿Cuál es la aceleración con la que la Tierra se acerca al cuerpo?

Puesto que la fuerza ejercida por el cuerpo sobre la Tierra es de 196 N y su masa de  $5,97 \cdot 10^{24}$  Kg la aceleración producida será de:

$$\frac{F}{m} = a \quad a = \frac{196}{5,97 \cdot 10^{24}} = 32,83 \cdot 10^{-24} \text{ m/s}^2$$

#### Ejemplo 8.

Calcula la masa de un cuerpo que al recibir una fuerza de 20 N adquiere una aceleración de  $5 \text{ m/s}^2$ .

$$F = m \cdot a \quad m = \frac{F}{a} \quad m = \frac{20}{5} = 4 \text{ Kg}$$

#### Ejemplo 9.

Calcular la masa de un cuerpo que aumenta su velocidad con una aceleración de  $0,5 \text{ m/s}^2$  cuando se le aplica una fuerza de 600N.

$$F = m \cdot a \quad m = \frac{F}{a} \quad m = \frac{600}{0,5} = 1200 \text{ Kg}$$

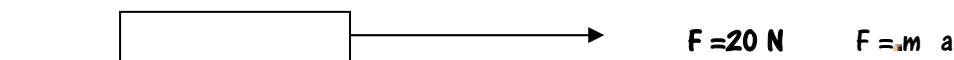
#### Ejemplo 10.

Un elevador de 2000Kg de masa, sube con una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  ¿Cuál es la fuerza que soporta el cable?

$$F = m \cdot a \quad F = 2000 \quad l = 2000 \text{ N}$$

### Ejemplo 11.

Un cuerpo de 10 Kg de masa esta apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Una persona tira del bloque con una soga fija al bloque, en dirección horizontal, con una fuerza de 20N. Calcular la aceleración del bloque, suponiendo despreciable la masa de la soga y nulo el rozamiento.

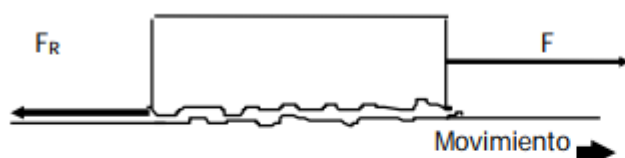


$$a = \frac{F}{m}$$

$$\frac{20}{10} = 2 \text{ m/s}^2$$

## 5.- FUERZA DE ROZAMIENTO , PESO Y FUERZA NORMAL

**Fuerza de rozamiento** ( $F_R$  ó  $F_\mu$ ) la fuerza que aparece en la superficie de contacto de dos cuerpos cuando se intenta deslizar uno sobre otro. La fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento, por tanto siempre la dibujaremos en sentido contrario al movimiento. La fuerza de rozamiento entre dos cuerpos se debe a que la superficie de contacto nunca es perfectamente lisa, sino que presenta rugosidades.



$F_R$  = Fuerza de rozamiento

$F$  = Fuerza aplicada

La expresión matemática de la fuerza de rozamiento es:

$$F_R = \mu \cdot N$$

$F_R$  = Fuerza de rozamiento

$\mu$  = Coeficiente de rozamiento dinámico

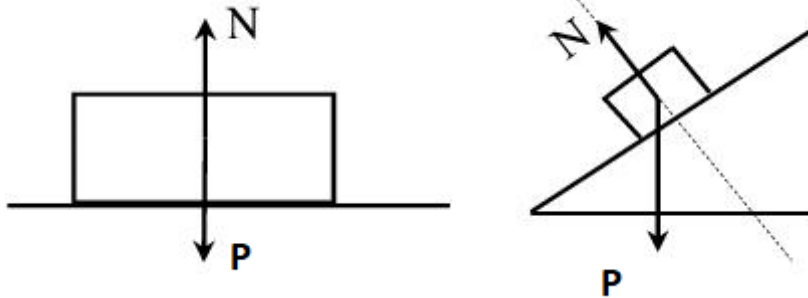
$N$  = Normal

**El peso** es una medida de la fuerza gravitatoria que actúa sobre un objeto. El peso equivale a la fuerza que ejerce un cuerpo sobre un punto de apoyo, originada por la acción del campo gravitatorio.

Por ser una fuerza, el peso se representa como un vector, definido por su módulo, dirección y sentido, aplicado en el centro de gravedad del cuerpo y dirigido aproximadamente hacia el centro de la Tierra. Por la misma razón, al ser una fuerza, se mide en el S.I. en newtons N.

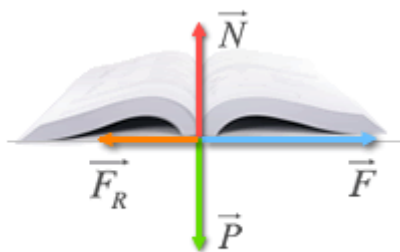
*Peso y masa son dos conceptos y magnitudes físicas muy diferentes, aunque aún en estos momentos, en el habla cotidiana, el término “peso” se utiliza a menudo erróneamente como sinónimo de masa, la cual es una magnitud escalar.*

**La normal (N)** ) Es la fuerza que ejercen las superficies sobre los cuerpos colocados sobre ellas. La dirección de la normal siempre es perpendicular a la superficie.



## 6.- PLANOS HORIZONTALES

Uno de los posibles casos en los que podemos hacer que un cuerpo se mueva horizontalmente sobre una superficie horizontal consiste en aplicarle una fuerza paralela a dicha superficie que llamaremos  $F$ . . Supongamos que tenemos un libro apoyado sobre una mesa y ejercemos sobre él una fuerza  $F$  paralela a la superficie de la mesa.



Fuente: Fisicalab

Las fuerzas que actúan sobre este libro son las que vemos en el dibujo: en la vertical la acción del peso y la normal, y en el plano horizontal la fuerza de rozamiento y la fuerza aplicada que actúa intentando arrastrar el libro.

Como las fuerzas son magnitudes vectoriales, para calcular la fuerza resultante de estas cuatro fuerzas que actúan simultáneamente sobre el libro, hallaremos el valor numérico (modulo) de las fuerzas resultantes en el eje  $x$  y en el eje  $y$ . El valor numérico de la fuerza resultante en el eje  $x$  ( $F_x$ ) será igual al de la fuerza  $F$  menos el de la fuerza de rozamiento ( $F_R$ ), ya que estas fuerzas tienen la misma dirección y sentido contrario. Del mismo modo, el valor numérico de la fuerza resultante en el eje  $y$  ( $F_y$ ) será igual al del  $P$  menos la Normal.

Si aplicamos la 1ª Ley de Newton en cada eje, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F - F_R = m \cdot a_x \\ \sum F_y &= N - P = m \cdot a_y\end{aligned}$$

Como el libro no se mueve ni hacia arriba, ni hacia abajo la aceleración en el eje y  $a_y = 0$ . Además, como la única aceleración que existe es la del eje x, podemos decir que  $a = a_x$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F - F_R = m \cdot a \\ \sum F_y &= N - P = 0\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\sum F &= F - F_R \\ F - F_R &= m \cdot a \\ N &= P\end{aligned}$$

En esta situación se cumple que la fuerza resultante tiene la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada.

## 7.- DEFORMACIONES INELÁSTICAS. CINEMÁTICA

Una vez que los cuerpos se encuentran en movimiento, la parte de la física que estudia los movimientos de los objetos se denomina **cinemática**.

### ➤ SISTEMA DE REFERENCIA.

La **posición** es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio con respecto a un punto que consideramos fijo. El sistema de referencia es el marco con respecto al cual vamos a indicar la posición de un cuerpo.

Antes de comenzar el estudio de los movimientos, es preciso indicar que se dice que un cuerpo está en reposo cuando su posición no varía con respecto a un punto fijo y que se toma como referencia a medida que transcurre el tiempo. En caso contrario se dice que el objeto está en movimiento. Es de interés resaltar que no existen puntos de referencia fijos y que todos están dotados de movimiento. Los cuerpos que aparecen en reposo con respecto a nosotros, tales como un árbol o una casa, se mueven con la Tierra y ésta, como los demás planetas, alrededor del Sol, el cuál, a su vez, se mueve en el Universo. En consecuencia, resulta evidente que el concepto de reposo es relativo.

### ➤ *Magnitudes y unidades*

Antes de comenzar con el estudio de los movimientos debemos conocer sus magnitudes y unidades.

**Magnitud física** es todo aquello que se puede medir. ( el tiempo, masa, espacio, volumen, etc. ). Hay otras cualidades que no se pueden medir, como el color, el olor, etc.

Hay dos tipos de magnitudes físicas :

- **Fundamentales:** Son aquellas que se definen por si solas. Por ejemplo, la masa, el tiempo, el espacio, etc.
- **Derivadas:** Son aquellas que se definen a partir de otras; necesitan de otras para conocer su valor. Por ejemplo, la velocidad, aceleración, densidad, etc, es decir, tenemos que hacer una operación matemática para conocer su valor.

### Actividad 7

De las siguientes magnitudes, di cuales son fundamentales y cuales son derivadas. Masa, fuerza, volumen, longitud, densidad, intensidad de corriente, tiempo, presión temperatura, velocidad y aceleración.

**Unidad** es en lo que se mide una magnitud, en lo que se expresa. Todas las magnitudes físicas tienen muchas unidades con las cuales se pueden expresar.

En física hay muchas magnitudes, pero en **cinemática** emplearemos, aparte de las fundamentales espacio y tiempo, las derivadas **velocidad (v)** y **aceleración (a)**.

❖ **Velocidad (v):** Es el espacio recorrido por un objeto en la unidad de tiempo.

**Velocidad media** es el cociente que resulta de dividir el espacio recorrido por un móvil y el tiempo invertido.

$$v = \frac{e}{t}$$

Por **ejemplo**, si un coche tarda 1,5 h en recorrer una distancia de 200 km, su velocidad media será:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{200 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} = 133,3 \text{ km/h}$$

**Velocidad instantánea** es la velocidad que posee un móvil en un determinado instante de su movimiento.

Aunque el coche del ejemplo anterior haga una media de 133,3 km/h, es evidente que en instantes determinados su velocidad ha sido superior y en otros inferior a esa velocidad media; puede que a los 5 minutos exactos de su movimiento su velocidad fuese 90,7 km/h y a los 62 minutos exactos fuese 152 km/h.

❖ **Aceleración (a):** Nos indica el ritmo o tasa con la que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en

función del tiempo.

**Aceleración media ( $a_m$ )** es el cociente que resulta de dividir la diferencia de dos velocidades a dos tiempos diferentes entre el tiempo transcurrido en tal variación.

$$a_m = \frac{v_f - v_o}{t}$$

**Ejemplo:** Si un coche cambia su velocidad de 72 km/h (20 m/s) a 90 km/h (25 m/s) de manera progresiva en 10 s entonces:

$$a_m = \frac{v_f - v_o}{t} = \frac{25 - 20}{10} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

La aceleración de un cuerpo puede ser positiva, si aumenta la velocidad de éste, o negativa, si disminuye la velocidad, es decir, si frena.

Por lo tanto las magnitudes que utilizaremos con sus unidades son:

| MAGNITUDES            | UNIDADES            |
|-----------------------|---------------------|
| Espacio $e$ .....     | m, Km.,             |
| Tiempo $t$ .....      | sg, hora.           |
| Velocidad $v$ .....   | m/sg, Km/h.         |
| Aceleración $a$ ..... | m/sg <sup>2</sup> . |

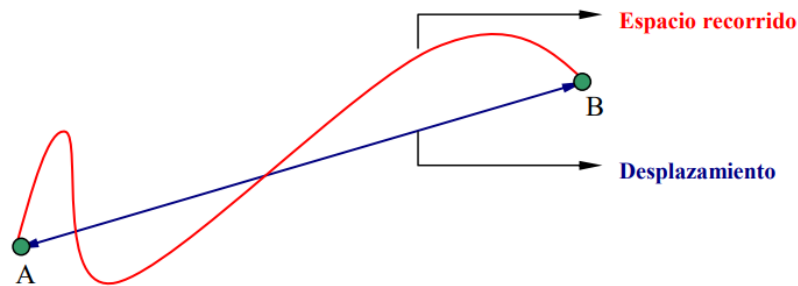
### ➤ Tipos de movimientos

Para clasificar los movimientos debemos conocer un concepto previo:

**Trayectoria:** Es la sucesión de puntos por donde pasa un móvil. Hay dos tipos de movimientos según sea su trayectoria:

- rectilíneo: cuando su trayectoria es una recta.
- Curvilíneo: cuando su trayectoria una curva.

**Espacio recorrido** es la longitud de la trayectoria descrita por un cuerpo. **Desplazamiento** es la diferencia entre la posición inicial y final de un cuerpo. Ambas magnitudes son longitudes y su unidad en el S.I. es el metro (m).



Sólo coincidirá espacio recorrido y desplazamiento en el caso de que la trayectoria sea rectilínea y el móvil no cambie de sentido

### Actividad 8

Relacionar los movimientos que realizan los cuerpos citados debajo con su correspondiente trayectoria.

- Un cuerpo cae desde un tercer piso.
- El extremo de las manecillas de un reloj.
- Los planetas alrededor del Sol.
- Una bala disparada por un fusil.

## 7.1.- Movimiento rectilíneo.

El movimiento rectilíneo, al igual que el movimiento curvilíneo, se divide en dos tipos:

- Uniforme: Velocidad constante
- Uniformemente acelerado. Velocidad variable.

### 7.1.1.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M. R. U.):

#### ➤ Estudio cualitativo

Es aquel cuya trayectoria es la línea recta y su velocidad (módulo, dirección y sentido) permanece constante, no varía, durante todo el recorrido. La ecuación que usaremos para resolver los problemas de este tipo de movimiento es:

$$v = e / t$$

#### Gráficas del m.r.u.:

Existen dos graficas:

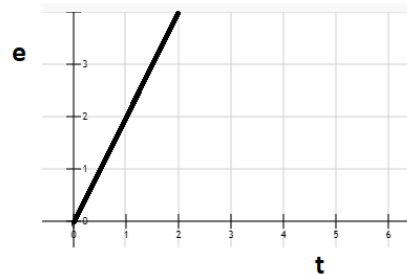
A) Gráfica espacio-tiempo ( e - t ) :

En esta gráfica se representa el espacio en el eje " y ", y el tiempo en el eje " x ". Hay que dar valores al

tiempo, y mediante la ecuación se calcula el espacio recorrido en cada tiempo, completándose así, la tabla de valores.

**Ejemplo:** Un hombre va a una velocidad constante de 2 m / sg. Representa su grafica e - t.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
| e | 0 | 2 | 4 | 6 |



Características de la gráfica:

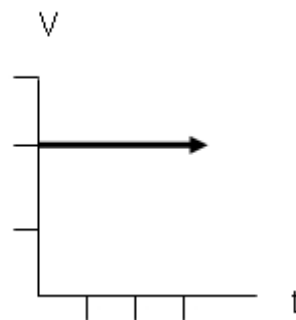
- Siempre sale una línea recta.
- Siempre pasa por el punto ( 0 , 0 ).
- La pendiente de la recta viene dada por la velocidad, cuanto mayor sea la velocidad del móvil, mayor es la pendiente.

#### B) Grafica velocidad-tiempo v - t :

En esta gráfica se representa la velocidad en el eje " y " y el tiempo en el eje " x ". Como la velocidad permanece constante, no hace falta hacer la tabla de valores, ya que para cualquier valor del tiempo la velocidad siempre vale lo mismo.

**Ejemplo:** Un hombre va a una velocidad constante de 2 m / sg. Representa su grafica v - t.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
| v | 0 | 2 | 2 | 2 |



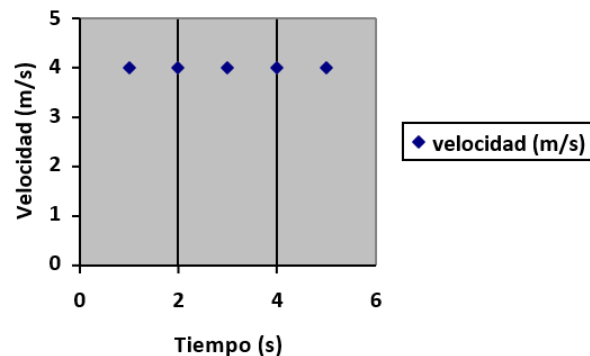
Características de la grafica:

- Siempre sale una línea recta, paralela al eje " x ".
- La distancia de la recta al eje " x " depende de la velocidad, cuanto mayor sea la velocidad, mayor es la distancia.

#### Actividad 9

1. ¿A cuántos m/s equivale la velocidad de un móvil que se desplaza a 72km/h?

2. En el gráfico, se representa un movimiento rectilíneo uniforme, averigüe gráfica y analíticamente la distancia recorrida en los primeros 4 s.



### ➤ Estudio cuantitativo

Como ya hemos visto, la ecuación que usaremos para resolver problemas de este tipo de movimiento es:

$$v = e / t$$

Donde.  $v$  = velocidad (m/sg o km/h)

$e$  = espacio (m o km)

$t$  = tiempo (sg u h)

En esta ecuación debemos conocer dos de sus parámetros y despejar el tercero. De esta forma podemos encontrar otras dos ecuaciones que se derivan de ésta:

$$e = v \cdot t$$

$$t = e / v$$

Es muy importante que las tres magnitudes tengan las unidades “coincidentes” entre ellas.

### Ejemplo:

Si un coche va a una velocidad de 25 m / sg , calcular que espacio recorrerá en 2 h.  $e = v \cdot t$  ;

$$e = 25 \times 2 = 50 ?$$

El problema está mal hecho, ya que tenemos dos unidades de tiempo que no coinciden. Por eso, lo que hay que hacer es pasar los m / sg a Km. / h o las horas a segundos.

$$2 \text{ h.} \times 3.600 \text{ sg/h} = 7.200 \text{ sg} ; \quad e = 25 \times 7.200 = 180.000 \text{ m} = 180 \text{ km}$$

$$25 \text{ m / sg} \times 3.600 \text{ sg/h} = 90 \text{ km / h} ; e = 90 \times 2 = 180 \text{ km}$$

$$1.000 \text{ m/Km.}$$

Podemos utilizar las siguientes reducciones para pasar de m/sg a Km./h y viceversa:

$$\frac{3.600 \text{ sg/h}}{1.000 \text{ m/km}} = 3,6$$

Ejemplo:

m/sg a km/h: multiplicando:  $25 \text{ m/sg} \times 3,6 = 90 \text{ km/h}$  km/h a m/sg: dividiendo:  $\frac{90 \text{ km/h}}{3,6} = 25 \text{ m/sg}$

Aquí tienes algunos ejemplos más para poder entender mejor el movimiento rectilíneo uniforme:

Ejemplos:

1. Una persona recorre un tramo de 600 metros a la misma velocidad invirtiendo un tiempo de 10 minutos, después se detiene durante cinco minutos y luego vuelve a caminar, también a velocidad constante, recorriendo 300 metros en cinco minutos. Calcula la velocidad en cada tramo del recorrido en metros/segundo.

En primer lugar debemos calcular el tiempo en segundos, 10 minutos son 600 segundos. Y 5 minutos son 300 segundos.

$$v = e / t$$

- Primer tramo,  $\frac{e}{t} = v$   $v = \frac{600}{600} = 1 \text{ m/s}$
- Segundo tramo, la velocidad es nula, está descansando.
- Tercer tramo,  $\frac{e}{t} = v$   $v = \frac{300}{300} = 1 \text{ m/s}$

La velocidad de esta persona antes y después del descanso es la misma, va a una velocidad constante.

2. Un motorista sale de Toledo a las 3 horas y 30 minutos a una velocidad de 90 Km/h, si la distancia entre Madrid y Toledo es de 64 Km y mantiene su velocidad constante durante todo el camino, ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Madrid? ¿A qué hora llegará?

En primer lugar debemos pasar nuestros datos a unidades del Sistema Internacional, para que los cálculos nos resulten efectivos. 64 Km son 64 000m. La velocidad de 90 Km/ hora:

$$\frac{90 \text{ Km}}{1 \text{ hora}} = \frac{90 \text{ 000m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

Entonces vamos a calcular el tiempo que tarda el motorista en llegar a Madrid:

$$\frac{e}{t} = v \quad t = \frac{e}{v} = \frac{64000}{25} = 2560 \text{ s}$$

Tarda en llegar, 2560 segundos que son 42,6 minutos. Con lo cual si ha salido a las 3 horas 30 minutos, habrá llegado a Madrid a las 4 horas con 12,6 minutos.

### Actividad 10

Representa en los ejes perpendiculares el espacio que recorre y el tiempo que tarda una persona que camina durante 6 kilómetros, siempre a la misma rapidez según la siguiente tabla:

| Tiempo | Tiempo | Espacio | Espacio |
|--------|--------|---------|---------|
| 8      | 480    | 0,5     | 500     |
| 16     | 960    | 1       | 1000    |
| 24     | 1440   | 1,5     | 1500    |
| 32     | 1920   | 2       | 2000    |
| 40     | 2400   | 2,5     | 2500    |
| 48     | 2880   | 3       | 3000    |
| 56     | 3360   | 3,5     | 3500    |
| 64     | 3840   | 4       | 4000    |
| 72     | 4320   | 4,5     | 4500    |
| 80     | 4800   | 5       | 5000    |
| 88     | 5280   | 5,5     | 5500    |
| 96     | 5760   | 6       | 6000    |

a) ¿Qué línea se obtiene con la representación?

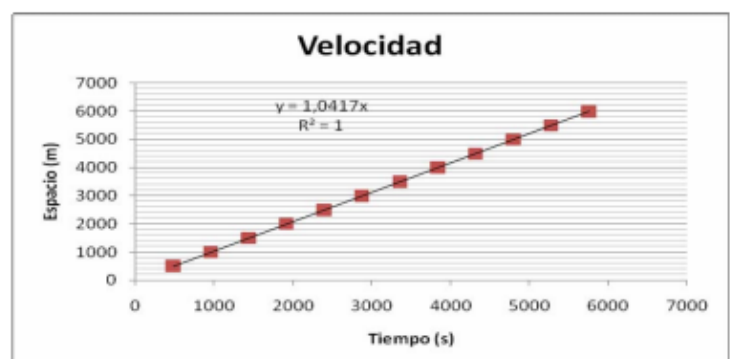
b) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer

100 metros?

c) ¿Cuántos metros recorre en una hora?

d) ¿Cuál es su velocidad?

e) ¿Tiene un movimiento uniforme



## 7.1.2.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.R.U.A.) :

### ➤ Estudio cualitativo

Es aquel cuya trayectoria es la línea recta, y su velocidad no permanece constante, varía con el tiempo.

Para resolver los problemas de este tipo de movimiento se emplean dos ecuaciones:

$$a = (v_f - v_o) / t \quad t = (v - v_o) / a$$

$$v_f = v_o + a t \quad e = v_o t + 1/2 a t^2$$

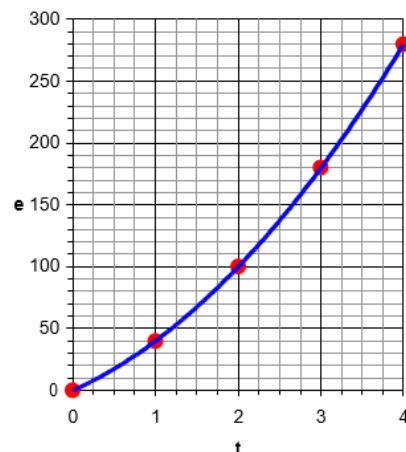
### Gráficas del m.r.a:

Existen dos gráficas:

#### A) Gráfica espacio-tiempo ( e - t ) :

El tiempo se representa en el eje " x " y el espacio en el eje " y ". Se dan valores al tiempo y mediante la ecuación de espacio se calcula el espacio recorrido en cada tiempo :

| Tiempo (s) | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  |
|------------|---|---|----|----|----|
| Espacio    | 0 | 4 | 16 | 36 | 64 |



Características de la gráfica:

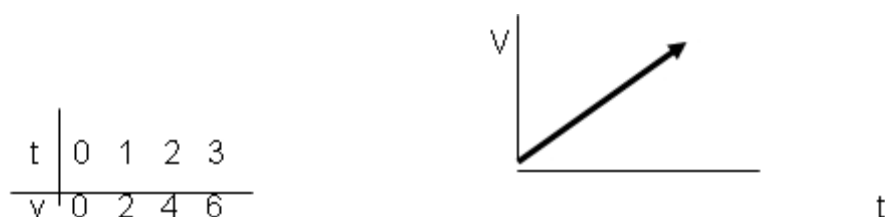
- Siempre pasa por el punto ( 0 , 0 ) .
- Siempre nos sale una parábola.
- La abertura de las ramas viene dada por la aceleración ; cuanto mayor sea la aceleración menor es la abertura , y viceversa .

#### B) Gráfica velocidad-tiempo ( v - t ) :

El tiempo se representa en el eje " x " y la velocidad en el eje " y ". Se dan valores al tiempo y mediante la ecuación de velocidad se calcula la velocidad en cada tiempo.

Ejemplos:

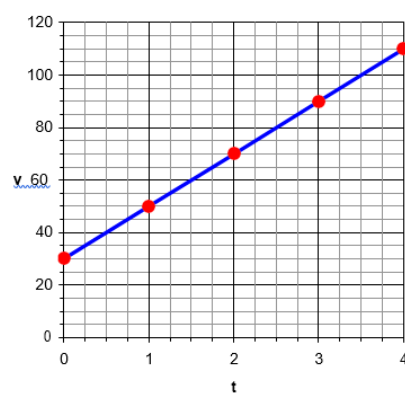
1. Un coche parte del reposo y acelera a razón de  $2 \text{ m / sg}^2$ . Representar su gráfica v-t



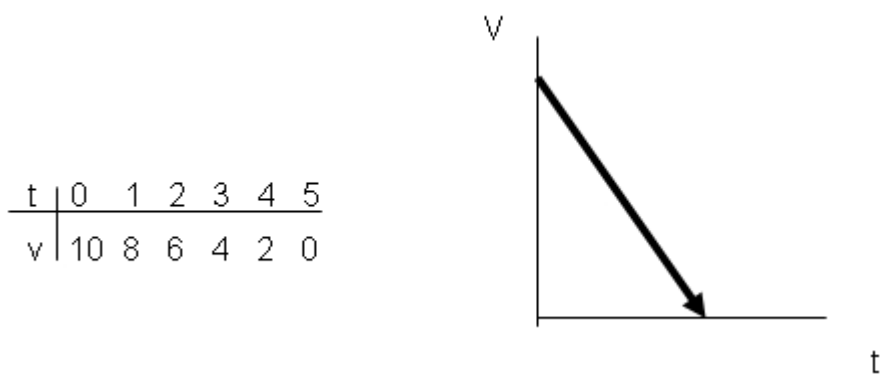
No todas las graficas v-t tienen esta forma. ¿Qué pasaría si el coche no parte del reposo, sino que tiene una cierta velocidad inicial?.

2. El mismo que el anterior pero con una  $v_0 = 30 \text{ m / sg}$ .

| Tiempo (s)      | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  |
|-----------------|----|----|----|----|----|
| Velocidad (m/s) | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 |



3. ¿Y si el coche va a una velocidad de  $10 \text{ m / sg}$  y frena a razón de  $2 \text{ m / sg}^2$ ?



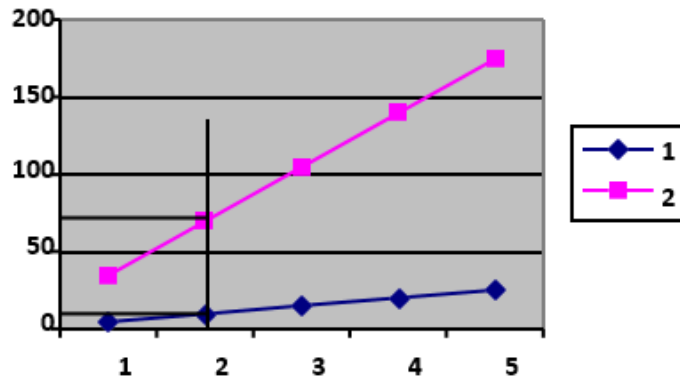
Características de la gráfica:

- Siempre sale una línea recta.
- No siempre pasa por el punto (0,0) .
- La pendiente de la recta viene dada por la aceleración; cuanto mayor es la aceleración mayor es la pendiente. (inclinación de la recta)
- Si el movimiento tiene aceleración negativa, es decir, si disminuye la velocidad con el tiempo, el punto de corte de la grafica con el eje del tiempo, nos da el tiempo que tarda el móvil en pararse.

**Ejemplo:**

En la gráfica se han representado la velocidad y el tiempo de dos móviles 1 y 2.

¿Cuál de los dos lleva mayor aceleración? ¿Por qué?



Para calcular en cuál de los cuerpos es mayor la aceleración debemos observar la gráfica en la que se representan las velocidades en función del tiempo.

Para un tiempo cualquiera, 2 segundos por ejemplo, trazamos una línea vertical hacia arriba y en los puntos de corte una recta horizontal hacia los valores de velocidad, podemos comprobar que la línea que corta a la gráfica 1 tiene una velocidad de 10 m/s aproximadamente. Para la línea horizontal que corta la gráfica 2 la velocidad es de 70 m/s. Ello significa que para un mismo tiempo, el cuerpo 2 ha alcanzado mayor velocidad que el primero, luego su aceleración es mayor. En el móvil 1 la aceleración es menor que en el móvil 2.

➤ **Estudio cuantitativo**

Las ecuaciones que verifican este tipo de movimiento son:

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Donde:

$e \rightarrow$  es el espacio recorrido en metros

$v_0 \rightarrow$  es la velocidad inicial en m/s

$t \rightarrow$  es el tiempo en segundos

$a \rightarrow$  es la aceleración en  $m/s^2$

$v \rightarrow$  es la velocidad en un determinado momento del recorrido en m/s

**Ejemplo:**

Un ciclista se está moviendo a 12 m/s cuando tiene que frenar al cruzársele un gato a 2,5 m delante de él. Consigue detenerse transcurridos 0,4 segundos.

- a) ¿qué aceleración tuvo el ciclista?
- b) ¿qué distancia recorrió antes de detenerse?
- c) ¿Atropelló al gato?

*Solución:*

- a)  $v = v_0 + a \cdot t$  utilizando esta formula y sustituyendo los datos que tenemos podemos calcular la aceleración del ciclista.

Datos:  $v_0 = 12 \text{ m/s}$

$t = 0,4 \text{ s} \rightarrow v_f = 0 \text{ m/s}$  Date cuenta que transcurridos esos 0,4 segundos el ciclista se detiene, por tanto su velocidad en ese momento será de 0 m/s.

sustituyendo:  $0 = 12 + a \cdot 0,4 \rightarrow$  despejando:  $a = -12/0,4 = -30 \text{ m/s}$  Observa que la aceleración es negativa porque el ciclista está frenando.

- b) De forma análoga pero con esta formula:  $e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

$$e = 12 \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot (-30) \cdot 0,4^2 = 4,8 - 2,4 = 2,4 \text{ m}$$

- c) Según el resultado obtenido en el apartado anterior vemos que el ciclista recorre 2,4 m antes de detenerse. Como el gato estaba a 2,5m del ciclista cuando éste comienza a frenar, Podemos concluir que el gato se salva por los pelos.

### ➤ CAÍDA LIBRE DE LOS CUERPOS:

Es un caso especial de M.R.U.A. Los cuerpos que caen libremente están sometidos a una aceleración, que es producida por la denominada fuerza de la gravedad, es decir, la atracción gravitatoria de la Tierra.

Galileo comprobó que todos los cuerpos de la misma forma y tamaño, aunque sean de distinta masa, caen libremente en el aire con la misma aceleración. Por ejemplo, dos esferas del mismo tamaño, una de acero y otra de madera, llegan a la vez al suelo al caer libremente desde la misma altura.

La aceleración que actúa sobre los cuerpos es la gravedad ( $g = 9,8 \text{ m / sg}^2$ ).

Si el cuerpo sube la velocidad disminuye con el tiempo y si baja la velocidad aumenta con el tiempo.

Las características más importantes de este movimiento son:

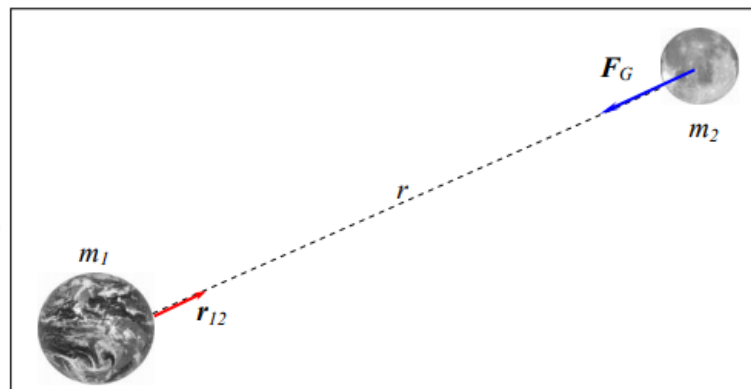
- 1.) La velocidad de lanzamiento es igual a la velocidad de llegada al mismo punto de lanzamiento.
- 2.) El tiempo que tarda en subir es igual al tiempo que tarda en bajar al mismo punto de lanzamiento.

## 8.- LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La Ley de Gravitación Universal fue descubierta por **Newton**. Se puede enunciar de la siguiente forma:

**“Toda partícula material del universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”**

Si las partículas que tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  están separadas una distancia  $r$  medida desde sus centros, como se ve en la figura, entonces, de acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza de atracción gravitacional  $F_G$  ejercida por la masa  $m_1$  sobre la masa  $m_2$  es:



Fuente: <http://www2.udec.cl/~jinzunza/fisica/cap9.pdf>

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Donde:

$G \rightarrow$  constante de gravitación universal  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \text{ (S.I.)}$

$m_1$  y  $m_2 \rightarrow$  masas de los cuerpos que interaccionan.

$r \rightarrow$  distancia entre los cuerpos.

$F_G \rightarrow$  fuerza de atracción entre los cuerpos.

Como hemos visto en apartados anteriores, sabemos que el peso de un cuerpo lo calculamos como  $P = m \cdot g$  y sabiendo que el peso en la Tierra de un cuerpo es la fuerza con que ésta atrae a dicho objeto, podríamos calcular el valor de la gravedad si sabemos el valor de la masa de la Tierra y su radio.

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F_G = P = m_1 \cdot g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$g = G \cdot \frac{m_2}{r^2}$$

Donde  $m_2$  sería la masa de la Tierra y  $r$  su radio

Esto mismo, lo podríamos extrapolar para cualquier planeta.

#### Ejemplo:

Una masa de 800 kg y otra de 500 kg se encuentran separadas por 3m, ¿Cuál es la fuerza de atracción entre dichas masas?

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 800 \text{ kg} \cdot 500 \text{ kg} / 3^2 \text{ m}^2 = 2,964 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

**Bloque 12.**

• **Tema 8 ENERGÍA Y TRABAJO**

**INDICE**

**1.- ENERGÍA**

**1.1.- FORMAS DE ENERGÍA**

**1.2.- TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS**

**2.- TRABAJO**

**3.- POTENCIA**

**4.- ENERGÍA MECÁNICA**

**4.1.- ENERGÍA CINÉTICA**

**4.2.- ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA**

**5.- CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA**

**6.- CALOR Y ENERGÍA TÉRMICA**

**6.1.- EQUILIBRIO TÉRMICO**

## 1.-ENERGÍA (E)

La energía hace posible el movimiento, aunque también se necesita para mantener caliente un objeto. Por tanto, la **ENERGÍA** es la capacidad que posee un cuerpo para producir transformaciones.

En el SI la unidad es el JULIO (J)

$$1 \text{ kJ} = 1000 \text{ J} \quad 1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J} \quad 1 \text{ kWh} = 3600 \text{ KJ}$$

### 1.1.- Formas de energía

La energía se puede presentar en la naturaleza de diferentes formas:

**Energía mecánica:** Se debe al movimiento o a la posición que ocupa un cuerpo.

**Energía térmica:** Es la que se desprende en la combustión de los cuerpos.

**Energía eléctrica:** Se origina por el movimiento de los electrones en el interior de materiales conductores.

**Energía radiante:** Es la que emiten los cuerpos.

**Energía química:** La que se pone de manifiesto en las reacciones químicas.

**Energía nuclear:** Se libera en las reacciones de fusión y fisión nuclear.

**Energía interna:** Se debe al movimiento interno de las partículas que constituyen la materia.

### 1.2.-TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS

La **ENERGÍA** puede cambiar de forma, cuando ocurren cambios en los sistemas, pero **NO PUEDE CREARSE DE LA NADA NI DESAPARECER**.

Se puede hacer que un sistema aumente o disminuya su energía, pero será porque otro sistema disminuye o gana energía.

**PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA:**

“ LA **ENERGÍA TOTAL** DEL UNIVERSO NI SE CREA NI SE DESTRUYE, SINO QUE SE TRANSFORMA. POR TANTO, LA **ENERGIA TOTAL** SE CONSERVA.”

## 2.- ¿Qué es trabajo? (W)

Llamamos TRABAJO al producto escalar de una fuerza por el desplazamiento que produce.  $W = F \cdot e$

Si una persona lleva colgada la mochila, pero no se mueve del lugar donde está NO realiza trabajo. Lo que hace es un **esfuerzo muscular**.

Llamamos ENERGÍA a la capacidad que tienen los cuerpos para producir transformaciones o para realizar un trabajo.

El trabajo y la energía se miden en las mismas unidades. (JULIOS = newton · metro)

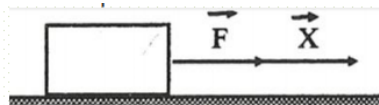
Cuando un cuerpo realiza un trabajo, pierde energía, que la gana el cuerpo sobre el que se realiza el trabajo. La variación de energía que tiene lugar es igual al trabajo realizado.

$$\text{Trabajo} = \text{variación de Energía } (\Delta E)$$

### 2.1.- Trabajo de una fuerza constante

Llamamos trabajo al producto escalar de la fuerza aplicada sobre un cuerpo por el desplazamiento que le produce. (Ya hemos dicho que si no hay desplazamiento no hay trabajo).

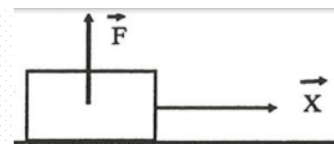
1.- Fuerza aplicada en la misma dirección que el desplazamiento:



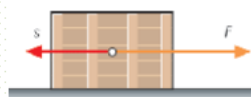
$$W = F \cdot \Delta x$$

2.- Fuerza aplicada perpendicular al desplazamiento:

$$W = 0$$

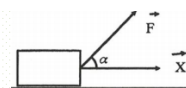


3.- Fuerza en la misma dirección pero sentido contrario al desplazamiento:



$$W = - F \cdot \Delta x$$

4.- Fuerza aplicada en dirección diferente al desplazamiento:

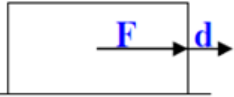
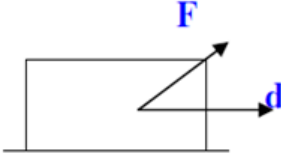
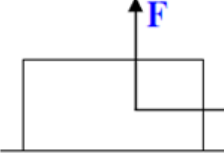
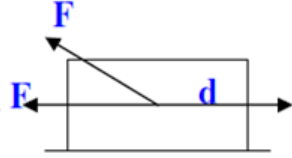


$$W = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$$

$\alpha$  es el ángulo que forma la dirección de la fuerza con la dirección del desplazamiento.

En el S.I. la unidad de trabajo se llama **julio (J)**, que equivale al trabajo realizado por una fuerza de 1N cuando el cuerpo se desplaza 1m en la misma dirección.

$$1 \text{ julio} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ metro}$$

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| $\alpha = 0^\circ$                                                                | $0^\circ < \alpha < 90^\circ$                                                     | $\alpha = 90^\circ$                                                                | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$                                                     |
| $\cos \alpha = 1$                                                                 | $\cos \alpha > 0$                                                                 | $\cos \alpha = 0$                                                                  | $\cos \alpha < 0$                                                                   |
| W máximo                                                                          | $W > 0$                                                                           | $W = 0$                                                                            | $W < 0$                                                                             |

## 2.2.- PESO

Ya vimos en el tema anterior que el peso de un cuerpo es una FUERZA y por tanto actúa como tal.

$$P = F = m \cdot g$$

Donde  $m$  es la masa en kilos del cuerpo y  $g$  es la gravedad  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Aunque en multitud de ocasiones se redondea a  $10 \text{ m/s}^2$ .

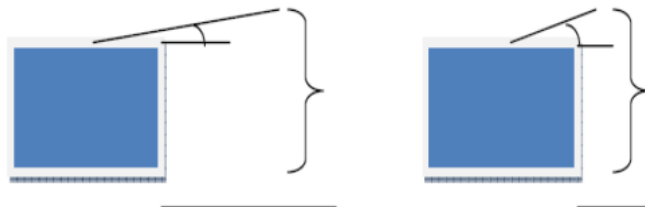
### Actividad 1

¿En cual de las siguientes situaciones se realiza trabajo?

- Empujamos con fuerza la pared de la habitación.
- Levantamos un paquete del suelo.
- Empujamos el coche hasta el garaje.
- Estudiamos.

### Actividad 2

Para arrastrar un objeto atamos una cuerda al mismo y tiramos del otro extremo. ¿Depende el esfuerzo a realizar de la longitud de la cuerda?



### Actividad 3. DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

Una grúa eleva un coche de masa  $800 \text{ Kg}$  hasta una altura de  $20 \text{ metros}$ . ¿Que trabajo realiza?. Toma la gravedad como  $10 \text{ m/s}^2$

En primer lugar hay que calcular la fuerza, o lo que es lo mismo el peso del coche.

$$F = P = m \cdot g \quad F = 800 \cdot 10 = 8000 \text{ N}$$

$$W = F \cdot e \quad W = 8000 \cdot 20 = 160\,000 \text{ Julios.}$$

#### Actividad 4 DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

Calcular el TRABAJO realizado por cada fuerza que actúa en el cuerpo durante 5 segundos.



Primero debemos saber el resultado en newton de la FUERZA RESULTANTE.

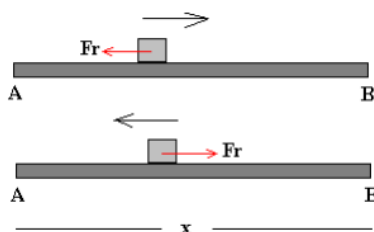
$$F_T = F_{1x} + F_2 - F_3 = 10 \cdot \cos 60 + 10 - 7 = 5 + 10 - 7 = 8 \text{ N}$$

2ª LEY DE NEWTON sabemos  $F = m \cdot a$   
 Por tanto,  $8 = 2 \cdot a \quad a = 8/2 = 4 \text{ m/s}^2$   
 Según la CINEMÁTICA,  $e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$   
 Así calculamos el desplazamiento producido:  $e = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = 50 \text{ m}$   
 El trabajo TOTAL será:  $w = F \cdot e = 8 \cdot 50 = 400 \text{ J}$

Y el trabajo realizado por cada fuerza:

$$\begin{aligned} W_1 &= F_{1x} \cdot e = 5 \cdot 50 = 250 \text{ J} \\ W_2 &= F_2 \cdot e = 10 \cdot 50 = 500 \text{ J} \\ W_3 &= -F_3 \cdot e = -7 \cdot 50 = -350 \text{ J} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 250 + 500 - 350 = 400 \text{ J}$$

### 2.3.-FUERZA DE ROZAMIENTO



Es la fuerza que aparece e intenta oponerse al desplazamiento. Siempre será de la misma dirección pero sentido contrario al desplazamiento.

Los trabajos que provienen de fuerzas que van a favor del movimiento son positivos; y los que provienen de fuerzas que van en contra del movimiento son negativos.

Cada superficie posee un COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ( $\mu$ ) característico de forma que:

$$F = P = \mu \cdot m \cdot g$$

#### Actividad 5

Un coche que marcha a una velocidad de 36 km / h por una carretera horizontal se deja en punto muerto. Si su masa es de 600 kg y el coeficiente de rozamiento ( $\mu$ ) es 0'5 , calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento hasta que se para el coche .

$$F = m \cdot a ; -F_r = m \cdot a \quad (\text{Tomando } g=10\text{m/s}^2)$$

$$Fr = \mu \cdot m \cdot g = 0.5 \cdot 600 \cdot 10 = 3.000 \text{ N.}$$

$$-Fr = m \cdot a; \quad a = -Fr / m; \quad a = -3.000 / 600; \quad a = -5 \text{ m / sg}^2$$

$$\text{El tiempo que tarda en pararse será: } 36 \text{ km / h} = 10 \text{ m / sg} \quad v_f = v_o + a \cdot t; \quad 0 = 10 - 5 \cdot t; \quad t = 2 \text{ sg.}$$

$$\text{El espacio recorrido en ese tiempo será: } e = v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2^2; \quad e = 20 - 10 = 10 \text{ m} \quad Wr = -Fr \cdot e = -3.000 \cdot 10 = -30.000 \text{ J.}$$

### 3.- CONCEPTO DE POTENCIA

La *potencia* es el cociente entre el trabajo realizado y el tiempo que se tarda en realizarlo.

$$P = \frac{W}{t}$$

Donde el W es el trabajo medido en JULIOS (J)

y t es el tiempo medido en segundos (s)

La unidad de *potencia* en el SI es el *vatio (w)*, que se define como la potencia necesaria para realizar un trabajo de un julio en un segundo:

$$1 \text{ vatio} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ segundo}} \leftrightarrow 1w = \frac{J}{s}$$

El vatio es una unidad muy pequeña, por lo que se suele utilizar el *kilovatio (kw)*, que equivale a 1000 w.

Otra unidad usada es el *CABALLO DE VAPOR (cv)*; de forma que **1cv = 735 w**

#### Actividad 6

Dos grúas suben un cuerpo de 100 Kg. a una altura de 20 m. La primera tarda 40 s y la segunda 50 s Calcular la potencia que desarrolla cada grúa.

$$P = w/t = (F \cdot e) / t = (m \cdot g \cdot e) / t$$

$$P_1 = (100 \cdot 10 \cdot 20) / 40 \text{ ----- } P_1 = 500 \text{ w.}$$

$$P_2 = (100 \cdot 10 \cdot 20) / 50 \text{ ----- } P_2 = 400 \text{ w.}$$

### 4.- ENERGÍA MECÁNICA

La *energía mecánica* es la que poseen los cuerpos en función de su estado de movimiento y/o de la posición que ocupan en el espacio. Se estudia bajo dos aspectos: *energía cinética* y *energía potencial*.



#### 4.1.-Energía cinética

**Energía cinética:** Es la que se manifiesta en un cuerpo debido al movimiento que realiza. Se define como “la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo mediante el movimiento”.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Donde m es la masa del cuerpo en kilos kg  
y v es la velocidad de dicho cuerpo en m/s

Al aplicar un trabajo sobre un cuerpo (*fuerza · desplazamiento*) se observa que el cuerpo cambia su velocidad, y por tanto también lo hace su Energía cinética.

$$W = \text{Trabajo} = \text{Variación de } E_c = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$$

La energía cinética, al ser en realidad un trabajo, se mide en JULIOS.

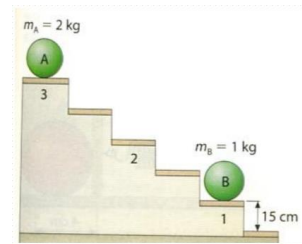
#### 4.2.-Energía potencial gravitatoria

**Energía potencial gravitatoria:** es la que posee un cuerpo en virtud de la posición que ocupa con respecto a un sistema de referencia.

Se podría definir como el trabajo que se realiza para elevar un cuerpo hasta una determinada altura.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Donde m es la masa del cuerpo en kilos kg  
g la gravedad terrestre 9,8 m/s<sup>2</sup> y  
h la altura en metros que alcanza el cuerpo.



La altura de referencia que tomamos es la superficie de la Tierra. Por tanto, en un desplazamiento horizontal no cambiará el valor de la energía potencial.

La energía potencial, al ser en realidad un trabajo, se mide en JULIOS.

#### Actividad 7

¿Qué energía potencial tendrá una persona de 50kg de masa situada a una altura de 10 m?

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 50 \cdot 9,8 \cdot 10 = 4900 \text{ J}$$

#### 5.- Conservación de la Energía Mecánica

“La suma de la Energía cinética más la Energía potencial que posee un cuerpo se mantiene constante”. Es decir, lo que aumente una de ellas, disminuye la otra.

$$E_{\text{mecánica}} = \text{constante} \quad E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = E_{\text{mecánica}} \rightarrow E_c + E_p = E_m = \text{cte}$$

## 6.- CALOR Y ENERGÍA TÉRMICA

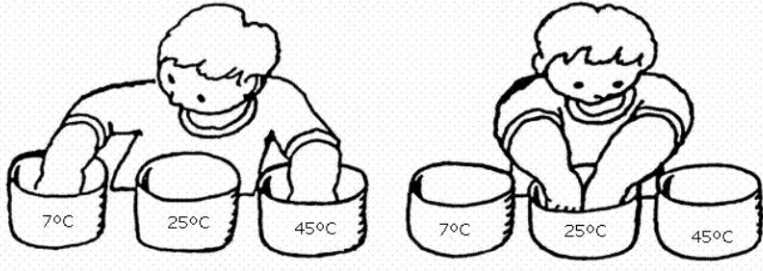
### *Escalas de Temperaturas*

Llamamos **calor** a la transferencia de energía que tiene lugar de un cuerpo caliente (temperatura mayor) a otro frío (temperatura menor) cuando se ponen en contacto. Por tanto, calor es un proceso de intercambio de energía, similar al trabajo.

La **Temperatura** es una medida de la agitación térmica de un cuerpo, es decir, de la energía cinética de las partículas que lo forman. A mayor energía cinética de las partículas, mayor movimiento de éstas y por tanto, mayor temperatura.

Los conceptos subjetivos de frío y caliente.

Calienta o enfría el agua de tres recipientes hasta que alcancen las temperaturas indicadas. Mete la mano derecha en el de la derecha y la izquierda en el de la izquierda. Después de unos minutos, mete ambas manos en el del centro.

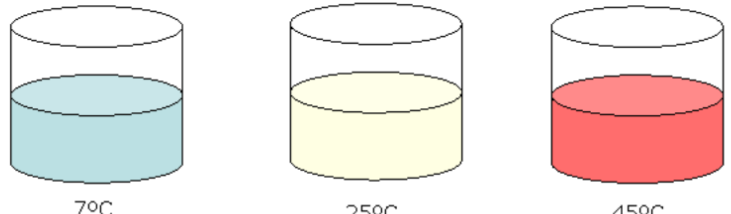


¿Qué ha sucedido?

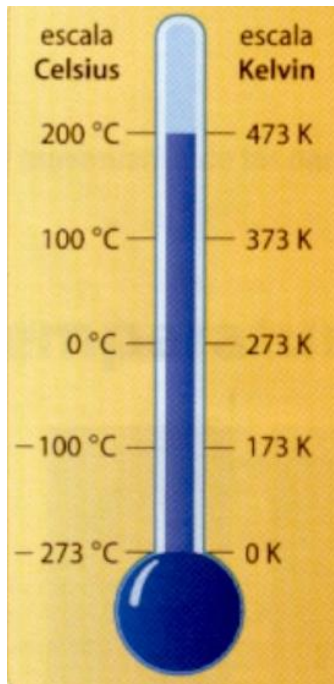
Los conceptos subjetivos de frío y caliente.

**Resultados:** Con la mano izquierda, la que estaba en el agua fría, el agua del recipiente del centro se nota caliente. Con la derecha se nota fría.

**Conclusión:** El órgano del tacto no es un buen termómetro para medir la temperatura.



7°C      25°C      45°C

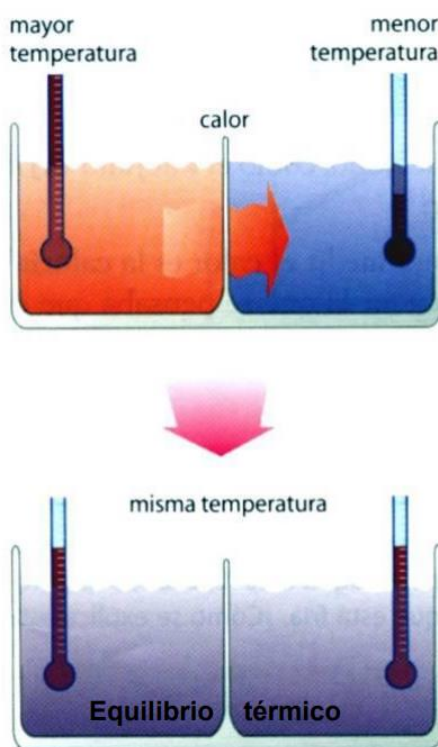


En la actualidad se utilizan tres escalas de temperatura: Fahrenheit, Celsius o centígrada, y absoluta. Se diferencian en la elección del punto 0 y en la escala.

Si llamamos  $C$  a la temperatura en grados centígrados,  $F$  a la temperatura en grados Fahrenheit y  $K$  a la temperatura Kelvin, la relación entre ellas es:

$$\frac{C}{100} = \frac{k - 273}{100}$$

### 6.1. EQUILIBRIO TÉRMICO:



Cuando dos sistemas o cuerpos en desequilibrio térmico entran en contacto, el de mayor temperatura transfiere energía térmica al de menor temperatura hasta conseguir el **equilibrio térmico**. El calor es la transferencia de energía desde un cuerpo que se halla a mayor temperatura a otro de menor temperatura.

El calor siempre se transfiere desde el cuerpo de mayor temperatura al de menor temperatura, independientemente de sus tamaños relativos.

El parámetro termodinámico que caracteriza al equilibrio térmico es la temperatura. Cuando dos cuerpos están a la misma temperatura, diremos que se encuentran en **equilibrio térmico**.

La cantidad de calor transferida (que gana o pierde un cuerpo de masa  $m$ ) la podemos calcular como:

$$Q = m \cdot c_e \cdot \Delta T$$

donde  $Q$  es el calor;  $m$  la masa de la sustancia;  $c_e$  el calor específico y  $\Delta T$  es la variación de temperatura.

Se llama **calor específico** de una sustancia a la energía necesaria para elevar un grado la temperatura de 1 kg de dicha sustancia. Se mide en J/kg·°C ó J/kg·K cal/gr·K

El calor específico de una sustancia es característico de esa sustancia, es decir, es un valor fijo para cada tipo de sustancia.

Cuando dos cuerpos a distinta temperatura entran en contacto se transfiere calor de uno a otro hasta que ambos alcanzan la misma temperatura. Cuando eso ocurre decimos que han alcanzado el equilibrio térmico, y se cumple que EL CALOR CEDIDO ( $Q_c$ ) POR UN CUERPO ES IGUAL EN VALOR ABSOLUTO QUE EL CALOR QUE HA ABSORBIDO ( $Q_a$ ) EL OTRO:

$$Q_c = Q_a$$

$$Q_c = m \cdot c_e \cdot \Delta T = m' \cdot c'_e \cdot \Delta T' = Q_a$$

$$m \cdot c_e \cdot (T_i - T_f) = m' \cdot c'_e \cdot (T_f - T_i)$$

Observa que  $\Delta T$  es una variación, y por tanto, la obtendremos restando dos temperaturas, final menos inicial o inicial menos final, según corresponda para que esa variación sea siempre un valor positivo. ¿De qué dependerá eso?, pues de si gana o pierde calor. Si el cuerpo pasa de mayor temperatura a menor, para que la variación sea positiva tendremos que restar  $T_i - T_f$ . Es decir, cede calor. Pero si lo que hace es absorber calor, entonces deberemos restar  $T_f - T_i$ , puesto que la temperatura final en ese caso es mayor que la inicial.

### Actividad 8

Si se mezclan dos litros de agua a 40° C con un litro de agua a 20° C, ¿Cuál será la temperatura final? (dato, el calor específico del agua es de 4180 J / kg°C)

Solución: El agua a mayor temperatura cede energía a la más fría, hasta conseguir el equilibrio térmico a una temperatura  $T_f$  que se encontrará comprendida entre ambos valores iniciales, de forma que: calor cedido = calor absorbido.

Como  $Q = m \cdot c_e \cdot (T_f - T_i)$  siendo  $c_e$  el calor específico,  $T_f$  y  $T_i$  las temperatura final e inicial, sustituyendo queda:

Calor cedido  $Q_c = 2 \cdot 4180 \cdot (40 - T_f)$ , calor absorbido  $Q_a = 1 \cdot 4180 \cdot (T_f - 20)$ , por lo que :

$2 \cdot 4180 \cdot (40 - T_f) = 4180 \cdot (T_f - 20)$  y despejando queda  $T_f = 33'33^\circ\text{C}$